

УДК 629.7.05

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОРРЕКЦИИ ТРАЕКТОРИИ
БЕСПИЛОТНОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА НА ОСНОВЕ
КОМПЛЕКСИРОВАНИЯ ДАННЫХ СЧИСЛЕНИЯ ПУТИ И
СПУТНИКОВОЙ НАВИГАЦИИ**

Азизов З.Ф.¹*Магистрант,**Казанский национальный исследовательский технический университет им.**А.Н. Туполева – КАИ,**Россия, Казань***Аннотация**

В статье рассматривается математическая модель определения местоположения беспилотного летательного аппарата (БЛА) методом счисления пути (dead reckoning) с учётом воздушной скорости, курса и параметров ветра. Численное интегрирование уравнений навигационного треугольника скоростей выполняется методом Эйлера, что приводит к линейному накоплению систематической навигационной ошибки. Для компенсации накопленной погрешности предложен алгоритм комплексирования бортовых и спутниковых данных, основанный на экспоненциальном законе запоминания ошибки. Аналитически получено условие выбора параметра комплексирования k , обеспечивающее запоминание не менее 95% ошибки за заданное время коррекции. Программная реализация модели на языке Python подтвердила эффективность предложенного подхода: за время коррекции продолжительностью одна минута итоговая ошибка местоположения снижена с 278,21 м до 6,40 м, что соответствует эффективности коррекции 97,7%.

Ключевые слова: беспилотный летательный аппарат, счисление пути, метод Эйлера, комплексирование навигационных систем, спутниковая навигация, накопление ошибки, математическое моделирование.

¹Научный руководитель – к.т.н., доцент Кремлева Э.Ш.
Дневник науки | www.dnevniknauki.ru | СМИ ЭЛ № ФС 77-68405 ISSN 2541-8327

A MATHEMATICAL MODEL FOR CORRECTING THE TRAJECTORY OF AN UNMANNED AERIAL VEHICLE BASED ON THE INTEGRATION OF DEAD-RECKONING AND SATELLITE NAVIGATION DATA

Azizov Z.F.

graduate student,

*Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI,
Russia, Kazan*

Abstract

The article examines a mathematical model for determining the position of an unmanned aerial vehicle (UAV) by the dead-reckoning method, taking into account airspeed, heading and wind parameters. Numerical integration of the velocity-triangle navigation equations is performed using Euler's method, which leads to a linear accumulation of systematic navigation error. To compensate for the accumulated error, an algorithm for integrating onboard and satellite data is proposed, based on an exponential error-memorization law. The condition for choosing the integration parameter k , which ensures that at least 95% of the error is memorized within a given correction time, is derived analytically. A software implementation of the model in Python confirmed the effectiveness of the proposed approach: during a one-minute correction window, the final position error was reduced from 278.21 m to 6.40 m, corresponding to a correction efficiency of 97.7%.

Keywords: unmanned aerial vehicle, dead reckoning, Euler method, navigation system integration, satellite navigation, error accumulation, mathematical modeling.

Введение

Автономность навигационной системы является одним из ключевых требований, предъявляемых к беспилотным летательным аппаратам (БЛА): в условиях подавления или временной недоступности сигналов глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС) базовым способом определения текущих координат остаётся метод счисления пути (dead reckoning) [9],

основанный на дискретном суммировании во времени измеряемых составляющих путевой скорости [6]. Датчики воздушной скорости, курса и параметров ветра, используемые для реализации счисления пути, обладают собственными систематическими и случайными погрешностями [8], которые при численном интегрировании накапливаются во времени, приводя к неограниченному росту ошибки определения местоположения [4].

Для компенсации накапливающейся погрешности бортовых навигационных систем на практике применяется комплексирование данных счисления пути с более точными, но не всегда доступными измерениями — сигналами ГНСС [3; 5]. Задачи комплексирования инерциальных и спутниковых навигационных систем подробно рассмотрены в [2], а общие принципы построения интегрированных навигационных комплексов — в работах [11; 12; 13; 15]. Наиболее распространённым инструментом статистического комплексирования является фильтр Калмана [14], однако для оценки принципиальной эффективности коррекции целесообразно рассмотреть более простую детерминированную модель запоминания ошибки, которая и является предметом настоящей работы.

Целью данной работы является построение и программная реализация математической модели коррекции траектории БЛА, комплексирующей метод счисления пути с данными спутниковой навигации, а также определение значения параметра комплексирования, обеспечивающего заданную точность коррекции местоположения.

Цель и задачи исследования

Цель работы — разработать математическую модель вычисления координат БЛА методом счисления пути с учётом ветра и реализовать алгоритм её коррекции по сигналам спутникового навигационного приёмника.

Для достижения цели решаются следующие задачи:

1. построить модель движения БЛА с учётом воздушной скорости, курса, скорости и направления ветра, угла атаки;
2. смоделировать процесс накопления навигационной ошибки при численном интегрировании методом Эйлера;
3. разработать алгоритм комплексирования, обеспечивающий коррекцию накопленной ошибки в периоды доступности спутникового сигнала;
4. аналитически определить значение параметра комплексирования k , при котором за заданное время коррекции запоминается не менее 95% накопленной ошибки;
5. выполнить программную реализацию модели и оценить эффективность предложенного алгоритма коррекции.

Математическая модель

Навигационный треугольник скоростей

Движение БЛА в горизонтальной плоскости описывается уравнениями навигационного треугольника скоростей, связывающими путевую скорость с воздушной скоростью V , курсом K , скоростью ветра W и его направлением δ [10]. Широтная (W_φ) и долготная (W_λ) составляющие путевой скорости определяются выражениями:

$$W_\varphi = \int (V \cdot \cos K + W \cdot \cos \delta) \cdot \cos(YA) dt, \quad (1)$$

$$W_\lambda = \int (V \cdot \sin K + W \cdot \sin \delta) \cdot \cos(YA) dt, \quad (2)$$

где YA — угол атаки, учитывающий отклонение продольной оси аппарата от вектора скорости. Численное интегрирование выражений (1)–(2) выполняется методом Эйлера [1] с постоянным шагом Δt : положение БЛА на шаге $(t + \Delta t)$ вычисляется как

$$y(t + \Delta t) \approx y(t) + f(x(t), y(t), t) \cdot \Delta t, \quad (3)$$

где f — функция, описывающая производные координат. Метод Эйлера обладает первым порядком точности, и любая систематическая погрешность в оценке составляющих путевой скорости (например, ошибка курса) приводит при

таком интегрировании к линейному во времени росту ошибки местоположения [1; 4].

Накопление ошибки

В рассматриваемой модели систематическая составляющая ошибки вводится в виде постоянного смещения курса ΔK , не учитываемого бортовой системой при вычислении координат методом счисления пути. Поскольку смещение курса не изменяется во времени, разность между истинной и вычисленной по счислению траекториями растёт линейно, что соответствует известному свойству ДР-навигации — неограниченному накоплению ошибки при отсутствии внешней коррекции [3; 9].

Комплексирование данных счисления пути и спутниковой навигации

В моменты доступности спутникового сигнала бортовая система получает точные координаты y , которые сравниваются с вычисленными по счислению координатами x . Задача комплексирования состоит в том, чтобы, не заменяя мгновенно счисляемые координаты спутниковыми (что вносило бы разрывы в траекторию), плавно скорректировать бортовое решение с помощью запоминаемой ошибки q [2]. Уравнение запоминания ошибки имеет вид:

$$q = k \cdot \int (y - z) dt, \quad z = x + q, \quad (4)$$

где k — параметр комплексирования, τ — время, прошедшее с начала коррекции. Решение уравнения (4) при постоянной разности $(y - x)$ имеет вид:

$$q(\tau) = (1 - e^{(-k \cdot \tau)}) \cdot (y - x). \quad (5)$$

Видно, что при $\tau \rightarrow \infty$ запомненная ошибка q стремится к полной разности $(y - x)$, то есть скорректированная координата $z = x + q$ стремится к истинной y ; скорость сходимости определяется параметром k .

Выбор параметра комплексирования

Из условия задачи требуется, чтобы за время коррекции $\tau = t_{\text{comp}}$ запоминалось не менее 95% накопленной ошибки:

$$(1 - e^{(-k \cdot \tau)}) \geq 0,95. \quad (6)$$

Используя приближение $e^{(-5)} \approx 0,0067 < 0,01$, можно считать условие (6) выполненным при $k \cdot \tau \geq 5/60$ то есть в единицах СИ $k \geq 5/60 \text{ с}^{-1}$ граничное значение $k = 5/60 \text{ с}^{-1}$.

Результаты моделирования

Программная реализация модели выполнена на языке Python с использованием библиотек NumPy (численные расчёты) и Matplotlib (визуализация) [1]. Значения параметров, использованных при моделировании, приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Параметры модели

Параметр	Обозначение	Значение
Воздушная скорость	V	50 м/с
Курс	K	30°
Скорость ветра	W	5 м/с
Направление ветра	δ	90°
Угол атаки	γ_A	2°
Шаг интегрирования	Δt	1 с
Общее время полёта	t_total	59 мин
Начало коррекции	t_comp_start	58 мин
Время коррекции	t_comp	1 мин
Параметр комплексирования	k	5/60 с ⁻¹
Систематическая ошибка курса	ΔK	0,1°

Моделируемый полёт выполняется на постоянных курсе и воздушной скорости в течение 59 минут; спутниковый сигнал полагается доступным на протяжении последней минуты полёта (58–59-я минута), что позволяет оценить эффективность коррекции при ограниченном времени видимости спутника — характерной ситуации для полёта БЛА в условиях городской застройки или под

лесным пологом. Результаты моделирования траекторий представлены на рисунке 1.

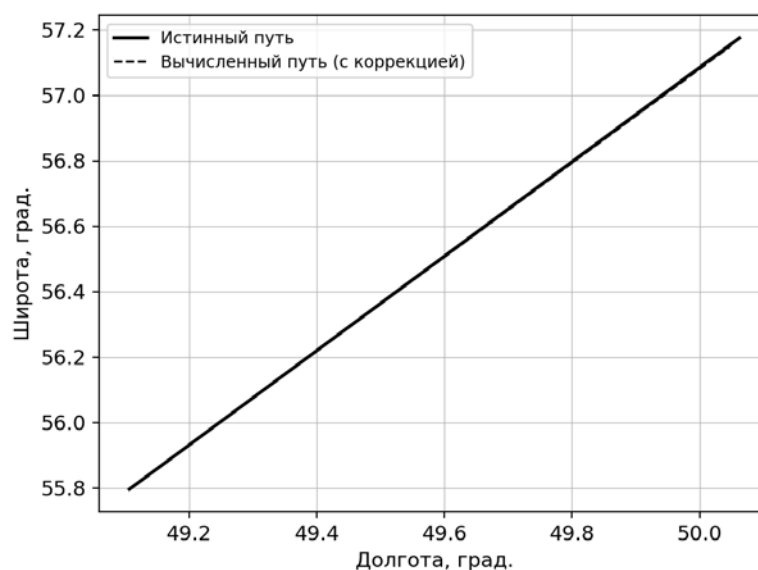


Рис. 1. Сравнение истинной и вычисленной (скорректированной) траекторий БЛА

На рисунке 1 видно, что истинная и скорректированная траектории визуально практически совпадают: величина накопленной ошибки (не более 300 м) пренебрежимо мала по сравнению с масштабом всей траектории полёта (порядка 150 км). Более наглядно динамика ошибки представлена на рисунке 2.

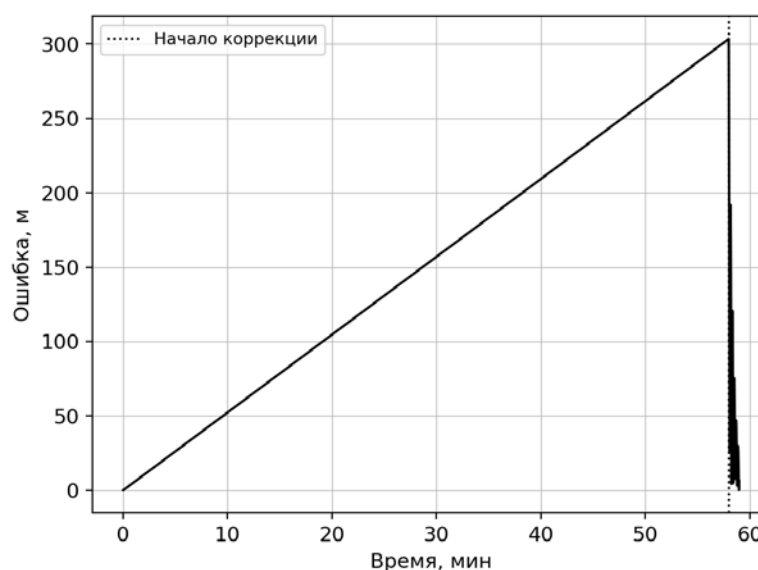


Рис. 2. Накопление и коррекция ошибки местоположения БЛА во времени

На рисунке 2 отчётливо видны два характерных участка: линейный рост ошибки на протяжении первых 58 минут полёта, обусловленный систематическим смещением курса и особенностями метода Эйлера, и резкое уменьшение ошибки в течение последней минуты полёта — на интервале действия алгоритма комплексирования. Количественные результаты моделирования приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Результаты моделирования

Показатель	Значение
Ошибка местоположения перед началом коррекции (58 мин)	278,21 м
Ошибка местоположения после коррекции (59 мин)	6,40 м
Эффективность коррекции	97,7 %

Полученное значение эффективности коррекции (97,7%) превышает требуемый порог в 95%, заданный условием (6), что подтверждает корректность аналитически определённого параметра $k = 5/60$ с⁻¹. Небольшой расчётного порога объясняется тем, что оценка (6) получена из предельного (асимптотического) условия и даёт нижнюю, гарантированную оценку доли запоминаемой ошибки; фактическая эффективность коррекции для конкретной реализации модели оказалась несколько выше расчётной.

Заключение

В работе построена и программно реализована математическая модель определения местоположения БЛА методом счисления пути с учётом ветра и коррекцией по сигналам спутниковой навигации. Показано, что метод Эйлера при численном интегрировании навигационных уравнений приводит к линейному накоплению систематической ошибки, вызванной, в частности, погрешностью измерения курса.

Предложенный алгоритм комплексирования, основанный на экспоненциальном законе запоминания ошибки, позволяет аналитически определить минимально необходимое значение параметра k для заданного

Дневник науки | www.dnevniknauki.ru | СМН ЭЛ № ФС 77-68405 ISSN 2541-8327

времени коррекции и требуемой доли компенсируемой ошибки. Для рассмотренного сценария полёта продолжительностью 59 минут с одноминутным окном видимости спутника выбранное значение $k = 5/60 \text{ с}^{-1}$ обеспечило снижение ошибки местоположения с 278,21 м до 6,40 м, то есть эффективность коррекции составила 97,7%, что соответствует и превышает заданное требование не менее 95%.

Использованная модель является упрощённой: не учитываются случайные составляющие погрешностей датчиков, изменения курса и скорости ветра в полёте, а коррекция реализована в детерминированной, а не статистически оптимальной постановке. Перспективным направлением дальнейших исследований представляется сопоставление рассмотренного алгоритма комплексирования с фильтром Калмана [14] и его модификациями, а также проверка модели на реальных телеметрических данных БЛА при наличии случайных и коррелированных ошибок датчиков [4; 13].

Библиографический список

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Лаборатория знаний, 2011. — 636 с.
2. Задача комплексирования инерциальных и спутниковых навигационных систем по первичным данным [Электронный ресурс]: автореф. дис. ... канд. техн. наук. — Режим доступа — URL: [https://www.dissercat.com/content/zadacha-kompleksirovaniya-inertsialnykh-i-sputnikovykh-navigatsionnykh-sistem-po-pervichnym-](https://www.dissercat.com/content/zadacha-kompleksirovaniya-inertsialnykh-i-sputnikovykh-navigatsionnykh-sistem-po-pervichnym) (Дата обращения 14.08.2026).
3. Ковылова Е.С. Инерциальная система БПЛА [Электронный ресурс]. — Режим доступа — URL: <https://skvot.2035.university/inercialnaya-sistema-bpla> (Дата обращения 14.08.2026).

4. Матвеев В.В., Распопов В.Я. Основы построения бесплатформенных инерциальных навигационных систем. – СПб.: ГНЦ РФ ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2009. – 280 с.
5. Модель инерциальной навигации для беспилотных летательных аппаратов [Электронный ресурс] // Universum: технические науки. — Режим доступа — URL: <https://7universum.com/ru/tech/archive/item/11683> (Дата обращения 14.08.2026).
6. Навигация воздушная [Электронный ресурс] // Большая российская энциклопедия. — Режим доступа — URL: <https://www.booksite.ru/fulltext/1/001/008/079/626.htm> (Дата обращения 14.08.2026).
7. Одноканальные инерциальные навигационные системы: учебное пособие [Электронный ресурс]. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. — Режим доступа — URL: <https://library.bmstu.ru/DigitalResources/Download/41148> (Дата обращения 14.08.2026).
8. Помыкаев И.И., Селезнев В.П., Дмитроченко Л.А. Навигационные приборы и системы / под ред. И.И. Помыкаева. – М.: Машиностроение, 1983. – 456 с.
9. Счисление пути (dead reckoning) [Электронный ресурс] // Справочник. — Режим доступа — URL: <https://spravochnick.ru/definitions/schislenie-puti-dead-reckoning/> (Дата обращения 14.08.2026).
10. Черный М.А., Кораблин В.И. Воздушная навигация: учебник. – М.: Транспорт, 1991. – 432 с.
11. Farrell J.A. Aided Navigation: GPS with High Rate Sensors. – New York: McGraw-Hill, 2008. – 552 p.
12. Grewal M.S., Weill L.R., Andrews A.P. Global Positioning Systems, Inertial Navigation, and Integration. – 3rd ed. – Hoboken: John Wiley & Sons, 2013. – 848 p.

13. Groves P.D. Principles of GNSS, Inertial, and Multisensor Integrated Navigation Systems. – 2nd ed. – Boston: Artech House, 2013. – 800 p.
14. Kalman R.E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems // Journal of Basic Engineering. – 1960. – Vol. 82, № 1. – P. 35–45.
15. Titterton D.H., Weston J.L. Strapdown Inertial Navigation Technology. – 2nd ed. – Stevenage: The Institution of Electrical Engineers, 2004. – 558 p.