

УДК 519.622.2

**ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ИЗ ОДНОЙ ТОЧКИ КАК
ДОПОЛНИТЕЛЬНОЕ КОМПЬЮТЕРНОЕ СРЕДСТВО
ВИЗУАЛИЗАЦИИ ПОВЕРХНОСТИ
В WOLFRAM MATHEMATICA 14.3**

Струк Н. А.¹

бакалавр 4-го курса каф. ФН-11,

*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
Москва, Россия*

Лебедев С. В.

к. ф.-м. н., доцент каф. ФН-11,

*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
Москва, Россия*

Бондаренко Н. И.

к. ф.-м. н., доцент каф. ФН-3,

*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
Москва, Россия*

Лебедева Н. В.

ст. преподаватель каф. СМ-3,

*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
Москва, Россия*

Аннотация

Работа посвящена моделированию геодезических линий на поверхности в системе компьютерной математики Wolfram Mathematica 14.3. Разработанные модули позволяют вычислять геодезические, выходящие из произвольной

¹ научный руководитель – Белотелов В. В., к. ф.-м. н., доцент, каф. ФН-11, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

точки поверхности в заданном направлении, а также геодезические, соединяющие две точки. Цель работы — улучшение визуализации заданных участков поверхности с использованием геодезических линий. Реализована возможность построения дополнительных геодезических в требуемых направлениях.

Ключевые слова: геодезические линии, поверхность, визуализация, компьютерное моделирование, Wolfram Mathematica 14.3.

GEODESICS FROM A POINT AS AN ADDITIONAL VISUALIZATION TOOL IN WOLFRAM MATHEMATICA 14.3

Struk N. A.*

Bachelor's degree student

*Bauman Moscow State Technical University,
Moscow, Russia*

Lebedev S. V.

Ph.D. (Phys.&Math.), Associate Professor

*Bauman Moscow State Technical University,
Moscow, Russia*

Bondarenko N. I.

Ph.D. (Phys.&Math.), Associate Professor

*Bauman Moscow State Technical University,
Moscow, Russia*

Lebedeva N. V.

Senior Lecturer

Bauman Moscow State Technical University,

Moscow, Russia

Abstract

The paper is devoted to the simulation of geodesic lines on surfaces using *Wolfram Mathematica 14.3*. The developed modules allow the computation of geodesics starting from an arbitrary point in a given direction, as well as geodesics connecting two points on a surface. The aim of the paper is to improve the visualization of selected surface regions using geodesic lines. Additional geodesics can be constructed in specified directions if required.

Keywords: geodesic lines, surface, visualization, computer simulation, *Wolfram Mathematica 14.3*.

Важное место в современной науке занимает компьютерная графика и визуализация, позволяющие представлять процессы, объекты, зависимости параметров и т. д., в частности пространственные геометрические объекты, в удобной для зрительного восприятия форме. Современная компьютерная визуализация прошла значительный путь развития и характеризуется термином «рендеринг», под которым понимается отрисовка и визуализация, а в более широком смысле — весь процесс получения изображения по модели с помощью компьютерной программы.

Под моделью понимается описание и представление объектов и явлений в виде строго определённой структуры данных. Такие структуры могут включать, например, напряжённости физических полей, геометрические характеристики, положение точки наблюдения, параметры освещения и другие величины. Для рендеринга (визуализации) часто используются программные пакеты моделирования, в том числе с поддержкой анимации.

В рамках данной работы ограничимся рассмотрением предыдущих исследований, посвящённых визуализации двумерных поверхностей с

использованием геодезических линий. Геодезические линии на поверхности обладают уникальным свойством, не присущим другим кривым. Каждый непрерывный гладкий отрезок кривой из бесконечного множества кривых, соединяющих две (достаточно близкие) точки поверхности, имеет определённую длину, причём её минимум достигается на единственной геодезической, соединяющей эти точки. Таким образом, геодезическая на поверхности является аналогом прямой на плоскости.

Именно по геодезическим движутся лучи света (фотоны) в четырёхмерном псевдоримановом пространстве общей теории относительности. Например, свет во Вселенной отклоняется вблизи массивных объектов и может огибать крупномасштабные структуры и небесные тела, такие как сверхскопления галактик, чёрные дыры и квазары. Экспериментально измеренное в 1919 году во время солнечного затмения отклонение луча света в гравитационном поле Солнца стало одним из первых подтверждений теории относительности А. Эйнштейна: полученное значение совпало с её предсказаниями и в два раза превысило результат, следующий из ньютоновской теории тяготения.

На двумерной поверхности, являющейся простейшим примером риманова пространства, геодезические аналогичным образом «огибают» изменения формы поверхности — как подъёмы, так и спуски. В частности, на плоскости при нулевой кривизне геодезические вырождаются в прямые линии.

Рассматриваемая аналогия между поведением геодезических в двумерных римановых и четырёхмерных псевдоримановых пространствах позволяет использовать геодезические линии как эффективное средство компьютерной визуализации геометрических объектов и их локальных особенностей. Поведение геодезических особенно информативно в областях со сложной геометрической структурой, где наблюдаются значительные кривизны, кручения и деформации. В таких случаях геодезические линии оказываются

более наглядным инструментом по сравнению с другими кривыми на поверхности.

В работе [1] при исследовании классической задачи преследования на пересечённой местности направление траектории определяется геодезической, соединяющей преследователя с преследуемым объектом; расчёты выполняются в системе компьютерной математики MathCAD. В четвёртой главе лекций [2, 170–217], посвящённых динамическому моделированию в системе Maple, пакет построения геодезических используется для исследования псевдосферы, тороидальной поверхности и однополостного гиперболоида. В диссертационной работе [3] разрабатываются методы построения семейств геодезических линий для формования технических поверхностей с использованием стеклоткани с целью повышения прочностных характеристик. В работе [4] геодезические линии применяются для исследования градиционных линий и поверхностей цветовых пространств в задачах четырёхцветной печати. В работе [5] представлен расчёт геодезических с использованием разработанных модулей в системе Wolfram Mathematica 12.1, включая визуализацию на псевдосфере, сфере, параболическом цилиндре и плоскости.

Построение геодезических для визуализации поверхности в системе *Wolfram Mathematica 14.3*

В системе *Wolfram Mathematica 14.3* используются уравнения геодезических линий на поверхности следующего вида:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{ds^2} + \Gamma_{11}^1 \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + 2\Gamma_{12}^1 \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} + \Gamma_{22}^1 \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 0, \\ \frac{d^2y}{ds^2} + \Gamma_{11}^2 \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + 2\Gamma_{12}^2 \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} + \Gamma_{22}^2 \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 0, \end{cases}$$

которые решаются с использованием встроенного численного решателя NDSolve. Ниже приведён фрагмент разработанного программного кода для нахождения и визуализации геодезической, соединяющей две точки:

```
findGeodesicBVP[pStart_, pEnd_, \[Alpha]_] :=
Module[{sol, smax, vx0, vy0},
smax = 1.5*Norm[pEnd - pStart];
If[smax < 1,
smax = 1]; {vx0, vy0} = Normalize[pEnd - pStart];
sol =
Quiet@Check[
NDSolveValue[
Join[geodesicEqs[\[Alpha]], {x[0] == pStart[[1]],
y[0] == pStart[[2]], x[smax] == pEnd[[1]],
y[smax] == pEnd[[2]]}], {x, y}, {s, 0, smax},
Method -> {"Shooting",
"StartingInitialConditions" -> {x'[0] == vx0,
y'[0] == vy0}}, $Failed];
If[sol === $Failed, $Failed,
ParametricPlot3D[
Evaluate[r[sol[[1]][s], sol[[2]][s], \[Alpha]]], {s, 0, smax},
PlotStyle -> {Thick, ColorData["Rainbow"][RandomReal[]]},
PlotRange -> All]]];
```

На основе приведённого алгоритма была реализована визуализация семейства геодезических линий на заданной поверхности. В первом примере рассматривается ситуация, когда геодезические соединяют точки, расположенные на окружности, с фиксированной центральной точкой. Это позволяет наглядно проанализировать поведение геодезических при различных начальных направлениях и оценить влияние геометрии поверхности на их форму.

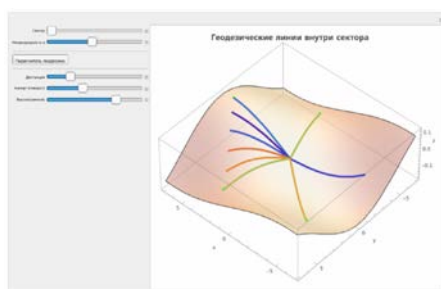
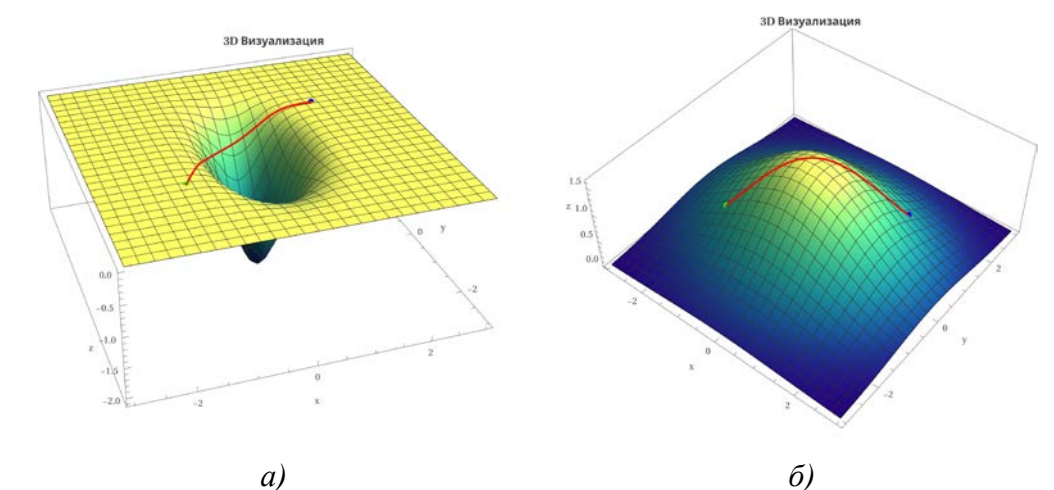


Рис. 1. Геодезические линии на поверхности $z = \alpha \cdot 0.15 \sin\left(\frac{x}{4}\right) \cos\left(\frac{y}{3}\right) + 0.01 \sin\left(\frac{y}{2}\right)$, соединяющие граничные точки окружности с фиксированной

центральной точкой; дополнительно показаны геодезические, построенные из промежуточных точек выбранного сектора

Как видно из рисунка 1, геодезические линии существенно отклоняются от прямолинейного поведения, что обусловлено кривизной поверхности. Дополнительные линии, построенные из промежуточных точек выбранного сектора, демонстрируют локальную структуру геодезического поля и позволяют более детально исследовать распределение траекторий в ограниченной области.

Далее рассмотрим влияние параметров поверхности на форму геодезических линий. Для этого были выбраны различные значения коэффициентов, определяющих геометрию поверхности, и для каждой конфигурации построена геодезическая, соединяющая фиксированную пару точек.



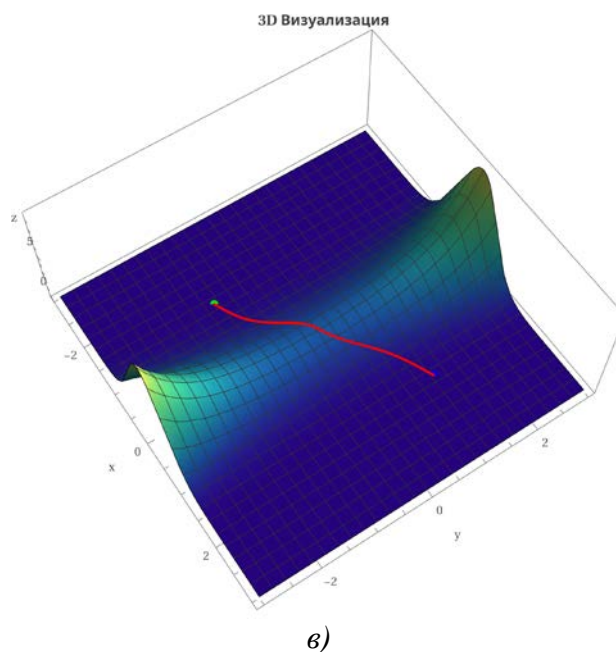


Рис. 2. Примеры геодезических линий между фиксированными точками на поверхности $z = F_1 \exp(-(\alpha u^2 + \beta v^2))$ при различных значениях параметров: а) $F_1 = 1.5, \alpha = 2.2, \beta = -0.2$; б) $F_1 = 0.4, \alpha = 0.5, \beta = 0.5$; в) $F_1 = -2.6, \alpha = 2.2, \beta = 0.7$

Из рисунка 2 видно, что изменение параметров F_1 , α и β существенно влияет на кривизну поверхности и, как следствие, на форму геодезических линий. В частности, увеличение амплитуды F_1 приводит к более выраженным отклонениям траектории, тогда как параметры α и β определяют анизотропию поверхности и направление наибольшего искривления.

В данном алгоритме производится оценка сверху параметра $s_{\max}$ через евклидово расстояние между заданными точками. Начальное приближение для производных определяется направлением из начальной точки в конечную. Далее методом пристрелки осуществляется уточнение начальных условий, после чего выполняется построение геодезической линии, соединяющей заданные точки.

В первом варианте визуализации из фиксированной точки поверхности проводится построение семейства геодезических, равномерно распределённых

Дневник науки | www.dnevniknauki.ru | СМИ ЭЛ № ФС 77-68405 ISSN 2541-8327

по угловой переменной в касательной плоскости (как правило, используется 5–6 направлений). При необходимости для более детального анализа выделяется отдельный угловой сектор, внутри которого дополнительно строятся геодезические в более узких подсекторах. Возможно последовательное уточнение таких секторов.

Во втором варианте визуализации задаются две точки поверхности, расположенные по разные стороны исследуемой области. В начальной точке предварительно определяется доверительный угловой диапазон, содержащий искомую геодезическую. Далее в выбранном диапазоне направлений методом пристрелки определяется точное начальное направление, соответствующее искомой геодезической.

Численная реализация и особенности метода

Численная реализация основана на решении системы уравнений геодезических, приведённой к системе первого порядка, с параметром длины дуги s . Интегрирование выполняется с использованием встроенного решателя `NDSolve` системы *Wolfram Mathematica*.

Для решения краевой задачи применяется метод пристрелки, сводящий её к последовательности задач Коши с уточнением начальных условий. Начальное приближение для вектора скорости задаётся нормированным направлением между точками:

$$\left(v_x^{(0)}, v_y^{(0)}\right) = \frac{p_{\text{end}} - p_{\text{start}}}{\|p_{\text{end}} - p_{\text{start}}\|}.$$

Максимальное значение параметра выбирается пропорционально расстоянию между точками:

$$s_{\text{max}} = \max(1, 1.5 \|p_{\text{end}} - p_{\text{start}}\|).$$

При сложной геометрии поверхности возможны чувствительность к начальному приближению и наличие нескольких геодезических. В этих случаях

используется ограничение углового диапазона начальных направлений с последующим уточнением.

При построении семейства геодезических из одной точки применяется равномерное распределение направлений в касательной плоскости, что позволяет эффективно выявлять особенности геометрии поверхности.

Предложенный подход обеспечивает устойчивое численное построение геодезических и удобную визуализацию геометрических свойств поверхности.

Выводы:

1. В системе Wolfram Mathematica 14.3 разработаны и апробированы модули для расчёта и визуализации геодезических линий в двух вариантах: из заданной точки в различных направлениях (приоритетный вариант) и между двумя точками поверхности.

2. Применение разработанных модулей открывает возможности их дальнейшей модификации с целью повышения удобства использования и расширения функциональности.

Библиографический список:

1. Дубанов А. А., Билдушкина М. Н. Построение геодезических линий в системе компьютерной математики «Mathcad» // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. — 2018. — Т. 12, № 7. — С. 37–41.
2. Игнатьев Ю. Г. Математическое моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики «Maple». — Казань: Казанский университет, 2013.

3. Тарасов Д. А., Мильдер О. Б. Математика и практика инвариантов цветовых пространств на примере определения баланса по серому для цифровой печатной системы // Компьютерная оптика. — 2020. — Т. 44, № 1. — С. 117–126.
4. Умбетов Н. С. Численные методы построения геодезических линий применительно к решению инженерных задач: дис. ... канд. техн. наук. — Москва, 1993.
5. Хотомцева М. А. Расчёт и построение геодезических на поверхностях в системе Wolfram Mathematica 12.1. — 2020. — URL: <https://rep.bntu.by/bitstream/handle/data/85316/294-296.pdf>