

УДК 330.46

МОДЕЛИРОВАНИЕ РЫНОЧНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ КОНКУРИРУЮЩИХ ФИРМ

Звягинцев А.И.

*доктор экономических наук, кандидат физико-математических наук,
Михайловская военная артиллерийская академия,
Санкт-Петербург, Россия*

Аннотация

В статье разработана нелинейная дискретная система второго порядка, которая моделирует динамику цен двух конкурирующих фирм и одновременно генерирует стратегию преодоления хаотичных тенденций в процессе рыночного ценообразования. Для формирования стратегии подавления хаотичной динамики цен используется принципиально новый подход математического моделирования, основанный на математических методах теории управления хаосом. Разработанные в данной статье методы довольно удобны с практической точки зрения и легко адаптируются к текущим реалиям. Полученная дискретная система выполняет функцию имитационного моделирования и за счет варьирования параметров генерируют разнообразные сценарии. Таким образом, для менеджеров компаний разработанная модель может служить вспомогательным аналитическим инструментарием в целях прогнозирования, диагностики, анализа и принятия решений при формировании ценовой политики.

Ключевые слова: конкурирующие фирмы, ценовая политика, математическое моделирование, теория управления хаосом, нелинейные дискретные системы.

MODELING THE MARKET INTERACTION OF TWO COMPETING FIRMS

Zvyagintsev A.I.

*Doctor of Economics, PhD in Physical and Mathematical Sciences,
Mikhailovskaya Artillery Military Academy,
Дневник науки | www.dnevniknauki.ru | СМН ЭЛ № ФС 77-68405 ISSN 2541-8327*

*Saint Petersburg, Russia***Abstract**

This article develops a second-order nonlinear discrete-time system that models the price dynamics of two competing firms while simultaneously generating a strategy to overcome chaotic trends in market pricing. To formulate a strategy for suppressing chaotic price dynamics, the study employs a novel mathematical modeling approach based on chaos control theory. The methods developed here are practically convenient and easily adaptable to current market realities. The resulting discrete-time system serves as a simulation tool capable of generating diverse scenarios through parameter variation. Consequently, the model can serve as an analytical aid for corporate managers in forecasting, diagnosis, analysis, and decision-making regarding pricing policy.

Keywords: competing firms, pricing policy, mathematical modeling, chaos control theory, nonlinear discrete systems.

Введение

В современной экономической науке все более важную роль играет математическое моделирование. Динамика многих экономических процессов может моделироваться нелинейными дискретными системами. В данной статье рассматривается пример использования математического аппарата для изучения процесса рыночного ценообразования.

Многообразие стратегий конкурирующих фирм в области ценообразования продукции на товарных рынках обусловлено спецификой конкретного рынка, формой взаимодействия между фирмами-конкурентами, влиянием потребителей на установление рыночного равновесия, состоянием экономики в целом. При моделировании процесса рыночного ценообразования приходится учитывать такие факторы как неопределенность и неполнота информации, стохастичность и нелинейность динамики спроса и предложения.

Хаотичный характер поведения рыночных цен способствует разработке все новых экономико-математических моделей. Подробный обзор исследований по моделированию рыночного ценообразования содержится, например, в работах [3, 4, 5, 8].

Экономико-математическая модель

В статье [3] для моделирования рыночного взаимодействия двух конкурирующих фирм в процессе формирования ценовой политики использовалась система дискретных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j + k_1 \frac{-x_j^2 y_j + 2c_1 x_j y_j + c_1 y_j^2}{(x_j^2 + x_j y_j)^2} \\ y_{j+1} = y_j + k_2 \frac{-x_j y_j^2 + 2c_2 x_j y_j + c_2 x_j^2}{(y_j^2 + x_j y_j)^2} \end{cases} \quad (1)$$

Здесь x_j, y_j — цены продукции соответственно первой и второй фирм в дискретный момент времени $j \in \{0, 1, 2, \dots\}$; k_1, k_2 — коэффициенты прироста цен за счет изменения ценовой политики соответственно первой и второй фирм; c_1, c_2 — параметры производственных затрат соответственно первой и второй фирм.

Неподвижная точка $(x_{\#}, y_{\#})$ системы (1) находится из решения алгебраической системы:

$$\begin{cases} x_{\#} = c_1 + \sqrt{c_1^2 + c_1 y_{\#}} \\ y_{\#} = c_2 + \sqrt{c_2^2 + c_2 x_{\#}} \end{cases} \quad (2)$$

В работе [3] установлено, что решение системы (2) определяет оптимальные цены для каждой фирмы, а неподвижная точка $(x_{\#}, y_{\#})$ составляет локальное равновесие цен по Нэшу [9].

Выбор значений параметров системы (1) представляет самостоятельную задачу и определяется конкретным видом производственной деятельности конкурирующих фирм. В качестве примера возьмем следующие значения параметров:

$$k_1 = 0,9; k_2 = 1,01; c_1 = 0,1; c_2 = 0,15.$$

В результате решения системы (2) для этих значений параметров получаются оптимальные цены для каждой фирмы $x_{\#} = 0,3275$; $y_{\#} = 0,4176$. Начальные цены конкурирующих фирм выберем с учетом полученной неподвижной точкой:

$$x_0 = 0,4; y_0 = 0,51. \quad (3)$$

На рисунке 1 представлено решение дискретной системы (1) с начальными условиями (3), которое отображает динамику цен конкурирующих фирм.

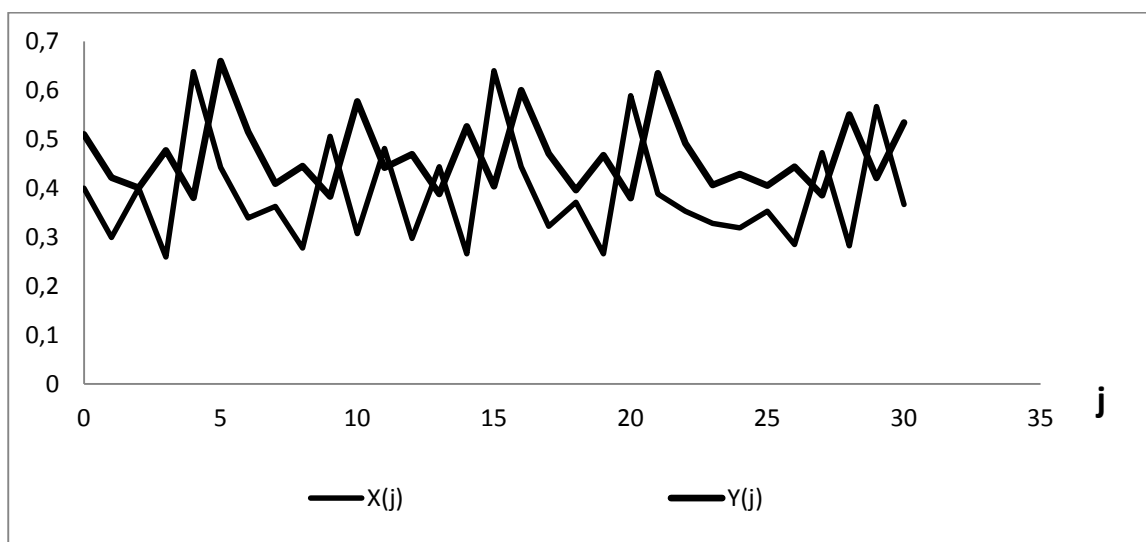


Рис. 1. - Динамика цен конкурирующих фирм

Полученные графики демонстрируют хаотичный характер изменения цен. Менеджеры фирм заинтересованы в стабильной работе своих предприятий. Поэтому важнейшей задачей менеджмента является эффективное управление бизнесом, направленное на стабилизацию ценовой политики и недопущение хаотичных тенденций.

В работе [3] преодоление хаотичной динамики предлагается путем изменения и тщательного подбора параметров системы (1). В нашей статье для подавления хаоса и стабилизации цен используется принципиально другой подход, основанный на методах современной теории управления хаосом [2,7].

Сконструируем алгоритм преодоления хаотичной динамики цен. Для достижения этой цели необходимо в систему (1) ввести управление $U(j)=(u_1(j), u_2(j))$, которое способно решение системы (1) вывести на стационарную орбиту.

Введем обозначения

$$v_1(j) = x_j; v_2(j) = y_j$$

и представим систему (1) в векторной форме:

$$v(j+1) = G(v(j)); j \in \{0, 1, 2, \dots\}, \quad (4)$$

где

$$v(j) = \begin{pmatrix} v_1(j) \\ v_2(j) \end{pmatrix};$$

$$G(v(j)) = \begin{pmatrix} v_1(j) + k_1 \frac{-v_1^2(j)v_2(j) + 2c_1v_1(j)v_2(j) + c_1v_2^2(j)}{(v_1^2(j) + v_1(j)v_2(j))^2} \\ v_2(j) + k_2 \frac{-v_1(j)v_2^2(j) + 2c_2v_1(j)v_2(j) + c_2v_1^2(j)}{(v_2^2(j) + v_1(j)v_2(j))^2} \end{pmatrix}.$$

Покажем, что подавление хаотичной динамики цен можно добиться за счет применения функции управления $U(j)$ и использования модифицированной системы

$$v(j+1) = G(v(j)) + U(j); j \in \{0, 1, 2, \dots\}. \quad (5)$$

Совершив линеаризацию системы (4) в окрестности неподвижной точки $v_{\#} = (x_{\#}, y_{\#})$ и затем применив метод Пирагаса [10], получим модифицированную систему (5), где $U(j)$ является функцией управления, предназначенной для стабилизации поведения решений системы. На основании результатов работ [2,7] по стабилизации дискретных систем получается функция управления следующего вида:

$$U(j) = G(v_{\#}) - G(v(j)) + B(v_{\#})[v(j) - v_{\#}] + Q(j)[v(j) - v(j-1)]. \quad (6)$$

Здесь $Q(j)$ – периодичная матрица, заданная формулой:

$$Q(j) = \begin{cases} (\beta E - B^2(v_{\#}))(B(v_{\#}) - E)^{-1}, j = 2n \\ 0, j \neq 2n, n \in \{1, 2, \dots\} \end{cases},$$

где $-1 < \beta < 1$, E – единичная матрица, O – нулевая матрица, $B(v_{\#})$ – матрица Якоби для вектор-функции G , $v_{\#}$ – неподвижная точка. Для рассматриваемой вектор-функции $G(v)$ матрица Якоби имеет следующий вид:

$$B(v) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$\text{Здесь } b_{11} = 1 + \frac{2k_1 v_2 (c_1 - v_1)}{(v_1^2 + v_1 v_2)^2} - \frac{2k_1 v_2 (2v_1 + v_2)(2c_1 v_1 + c_1 v_2 - v_1^2)}{(v_1^2 + v_1 v_2)^3};$$

$$b_{12} = \frac{k_1 (2c_1 v_1 + 2c_1 v_2 - v_1^2)}{(v_1^2 + v_1 v_2)^2} - \frac{2k_1 v_1 v_2 (2c_1 v_1 + c_1 v_2 - v_1^2)}{(v_1^2 + v_1 v_2)^3};$$

$$b_{21} = \frac{k_2 (2c_2 v_1 + 2c_2 v_2 - v_2^2)}{(v_2^2 + v_1 v_2)^2} - \frac{2k_2 v_1 v_2 (c_2 v_1 + 2c_2 v_2 - v_2^2)}{(v_2^2 + v_1 v_2)^3};$$

$$b_{22} = 1 + \frac{2k_2 v_1 (c_2 - v_2)}{(v_2^2 + v_1 v_2)^2} - \frac{2k_2 v_1 (2v_2 + v_1)(2c_2 v_2 + c_2 v_1 - v_2^2)}{(v_2^2 + v_1 v_2)^3}.$$

Покажем, что для хаотичной динамики цен, полученной в результате решения задачи (1)-(3), модифицированная система (5) дает возможность моделировать преодоление хаоса и последующий процесс стабилизации цен конкурирующих фирм. Решив модифицированную систему (5) с начальными условиями (3), получаем сценарий преодоления хаотичной динамики цен, который графически представлен на рисунке 2.

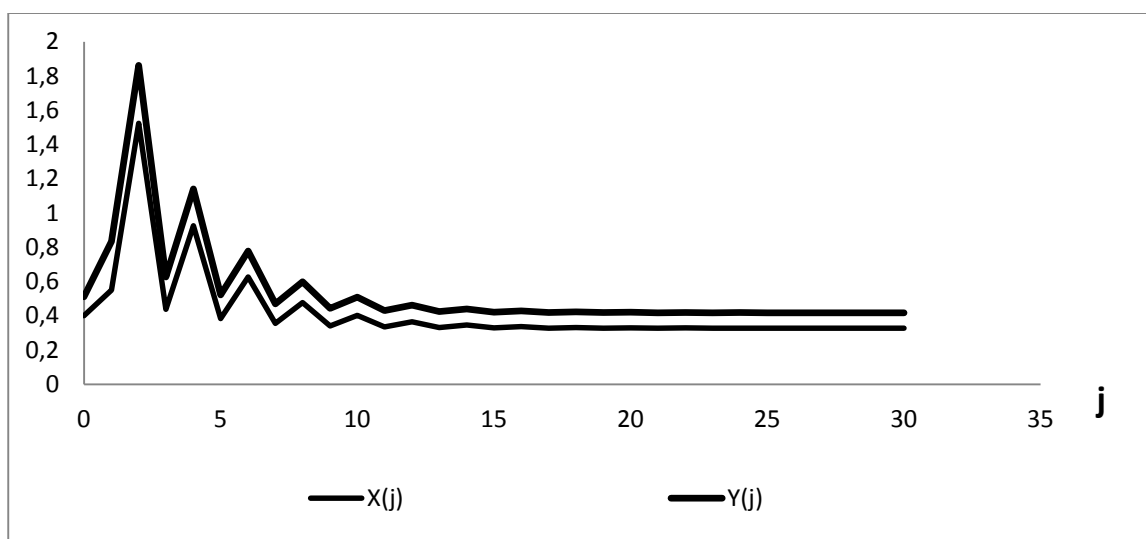


Рис. 2. - Смоделированный сценарий преодоления хаотичной динамики цен

Стратегию преодоления хаотичной динамики цен определяет функция управления $U(j)$, которая в явном виде задается аналитической формулой (6). Положительные значения функции управления указывают на необходимость повышения цен, а отрицательные значения требуют снижения цен. Таким образом, для успешной реализации сценария по стабилизации цен конкурирующих фирм, изображенного на рисунке 2, необходимо в конкретные моменты времени и в строго определенных размерах увеличивать или уменьшать цены. На рисунке 3 показаны графики для компонент функции управления $U(j)=(u_1(j), u_2(j))$, которые имеют импульсообразный и быстро затухающий характер.

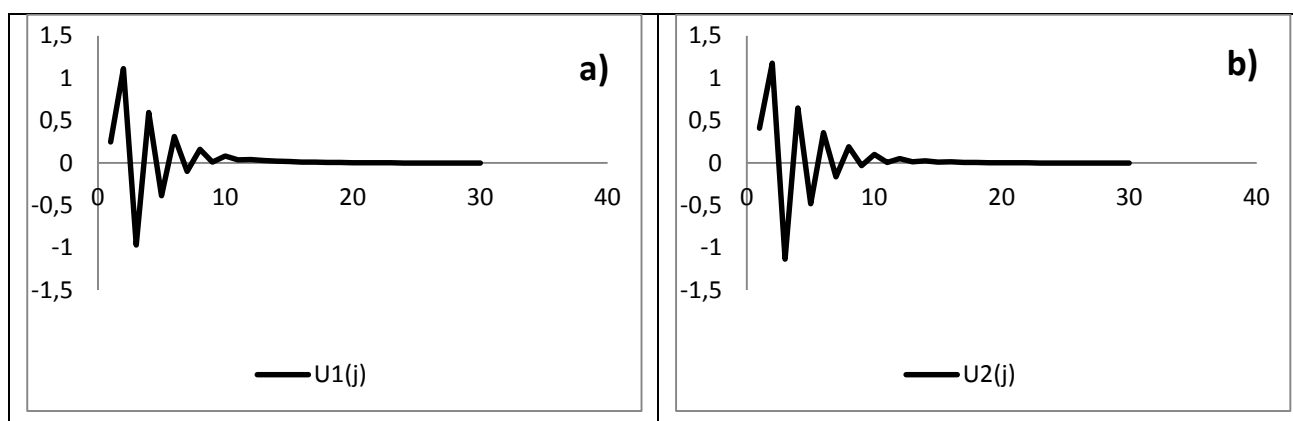


Рис. 3. - Графики смоделированной функции управления (6): а) для первой компоненты; б) для второй компоненты

Графики рисунка 3 являются наглядным изображением программы взаимодействия двух конкурирующих фирм в целях стабилизации цен.

Заключение

В статье разработана нелинейная дискретная система, которая позволяет моделировать различные сценарии изменения рыночных цен и одновременно генерирует стратегию стабилизации ценовой динамики. Полученная в явном виде математическая формула для управления $U(j)$ позволяет определять четкие сроки и необходимые размеры корректировки цен. При этом, как видно из рисунка 3, корректирующие воздействие обеих фирм требуется только на начальном этапе, а затем оно становится нулевым.

Разработанные в данной статье методы довольно удобны с практической точки зрения и легко адаптируются к текущим реалиям. Дискретная система (5) выполняет функцию имитационного моделирования и за счет варьирования параметров генерируют разнообразные сценарии. Полученная модель позволяет проводить анализ возможностей, способствующих преодолению хаоса в рыночном ценообразовании и выводу ценовой динамики на устойчивую траекторию. Таким образом, для менеджеров компаний разработанная в статье математическая модель может служить вспомогательным аналитическим инструментарием в целях прогнозирования, диагностики, анализа и принятия решений при формировании ценовой политики. Для удобства использования этот инструментарий можно автоматизировать, поскольку все полученные формулы легко программируются.

В практической деятельности на основе бухгалтерской отчетности и обязательной для раскрытия информации менеджеры конкурирующих фирм могут оценить и рассчитать средние значения параметров, входящих в полученную модель (5). Задав эти параметры и изменяя начальные данные, можно моделировать сценарные прогнозы, которые являются базой для стратегического планирования деятельности компаний. В целях предотвращения хаоса в рыночном ценообразовании менеджеры компаний с помощью предложенной модели могут определить размеры превентивных корректирующих операций и моменты их проведения. Взаимодействие по осуществлению перечисленных мероприятий способствует формированию эффективной ценовой политики конкурирующих фирм.

Следует отметить, что предложенный в данной статье метод стабилизации был эффективно применен [1] к модели Файхтингера [6] для двух конкурирующих фирм, осуществляющих активную инвестиционную стратегию на товарном рынке.

Библиографический список:

1. Звягинцев А.И. Подавление рыночного хаоса и стабилизация бизнеса / А.И. Звягинцев // Эффективное антикризисное управление. – 2015. – №6(93). – С. 78-81.
2. Леонов Г.А. Стабилизация по Пирагасу дискретных систем запаздывающей обратной связью с периодическим импульсным коэффициентом усиления / Г.А. Леонов, К.А. Звягинцева // Вестник СПбГУ. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. – 2015. – т. 2(60). – вып. 3. – С. 342-353.
3. Орлова Е.В. Модель согласования экономических интересов дуополистов при формировании ценовой политики / Е.В. Орлова // Компьютерные исследования и моделирование — 2015. — Т.7. — № 6. — С.1309-1329.
4. Островский А. В. Об одном классе моделей конкурентного ценообразования в рыночной экономике / А. В. Островский // Дифференциальные уравнения и процессы управления. Электронный журнал. —2000. — № 2. — С. 58–77. — URL: <http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/j058.pdf> (дата обращения: 16.09.2026).
5. Филатов А. Ю. Математические модели несовершенной конкуренции / А.Ю. Филатов, Н.И. Айзенберг. — Иркутск: Изд-во ИГУ. 2012. — 117 с.
6. Feichtinger G. Economic evolution and demographic change / G. Feichtinger. Berlin: Springer. 1992.
7. Leonov G.A. Pyragas stabilization of discrete systems via delayed feedback with periodic control gain / G.A. Leonov, K.A. Zvyagintseva, O.A. Kuznetsova // IFAC-PapersOnLine. – 2016. – v. 49-14. – P. 56-61.
8. Melitz M. J. Market size, Trade, and Productivity / M. J. Melitz, G.I.P. Ottaviano // Review of Economic Studies.— 2008. — Vol. 75(1). — P. 295–316.
9. Nash J.F. Equilibrium points in n-person games / J.F. Nash // PNAS. – 1950. – V.36 (1) – P. 48—49.

10. Pyragas K. Continuous control of chaos by self-controlling feedback / K.Pyragas
// Physics Letters A. – 1992. – v. 170. – P. 421-428.