

УДК 512 + УДК 372.851

**ОСОБЕННОСТИ ПРЕПОДАВАНИЯ ВВЕДЕНИЯ В АЛГЕБРУ СТУДЕНТАМ
ТЕХНИЧЕСКИХ ВУЗОВ С НАПРАВЛЕНИЕМ ПОДГОТОВКИ
"МАТЕМАТИКА И КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ"**

Дерябина Г.С.

кандидат физико-математических наук, доцент

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана

(национальный исследовательский университет)

Москва, Россия

Киреева Е.А.

кандидат физико-математических наук, доцент

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана

(национальный исследовательский университет)

Москва, Россия

Аннотация

В статье рассматриваются аспекты преподавания введения в алгебру студентам технических университетов, обучающимся по направлению подготовки "Математика и компьютерные науки", на основе опыта кафедры "Вычислительная математика и математическая физика" Московского Государственного Технического Университета им. Н.Э. Баумана. Обсуждаются необходимые в данном разделе курса алгебры фундаментальные понятия и их

приложения к компьютерным технологиям, структура домашних заданий и контрольных работ.

Ключевые слова: алгебра, преподавание, теория делимости, бинарное отношение, функция, подстановка.

***FEATURES OF TEACHING INTRODUCTION TO ALGEBRA TO STUDENTS
OF TECHNICAL UNIVERSITIES WITH A STUDY DIRECTION
"MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE"***

Deryabina G.S.

PhD, Associate Professor,

Bauman Moscow State Technical University,

Moscow, Russia

Kireeva E.A.

PhD, Associate Professor,

Bauman Moscow State Technical University,

Moscow, Russia

Abstract

In the paper, we consider aspects of teaching of introduction to algebra to students of technical universities studying in the field of training "Mathematics and Computer Science" based on the experience of the department "Computational mathematics and mathematical physics" of Bauman Moscow State Technical University. The fundamental notions required in this section of the algebra course and their

Дневник науки | www.dnevniknauki.ru | СМН ЭЛ № ФС 77-68405 ISSN 2541-8327

applications to computer technology, the structure of homework and tests are discussed.

Keywords: algebra, teaching, divisibility theory, binary relation, function, substitution.

Курс алгебры в настоящее время читается во многих высших учебных заведениях, в том числе и в технических университетах. В классических и педагогических университетах этот курс обычно состоит из трёх частей: введения в алгебру, линейной алгебры и высшей алгебры, в которой относят элементы теории групп, колец и полей. Методика преподавания такого курса хорошо разработана, написаны уже ставшие классическими учебники ([3], [5], [6], [14]) и сборники задач ([7], [9]). В то же время в технических университетах, в том числе и в МГТУ им. Н.Э. Баумана, традиционно преподавали только линейную алгебру, часто в связке с аналитической геометрией и кратким знакомством с теорией многочленов и комплексных чисел ([8], [15]). Исключение составляли только отдельные специальности, на которых изучались избранные вопросы теории групп и теории представлений, связанные с симметрией ([16]).

В последние десятилетия бурное развитие компьютерных технологий и их проникновение практически во все сферы деятельности человека, и возникшая в связи с этим необходимость в соответствующих специалистах, привели к появлению в очень многих университетах специальностей, связанных с компьютерными науками, а также к расширению преподавания алгебры студентам инженерных специальностей ([11]). Оказалось, что для решения многих вопросов, связанных с работой с большими данными, кодированием и криптографией, формулируемых на языке линейной алгебры, то есть матриц, систем линейных уравнений и пр., необходима высшая алгебра в достаточно

большом объёме. Таким образом, изучение алгебры, причём не только линейной, но и высшей, то есть свойств так называемых алгебраических структур, оказалось необходимой частью образования для специалиста по компьютерным наукам ([12], [2]), что привело к появлению новых учебников и сборников задач, учитывающих специфику подготовки таких специалистов ([12], [13], [10]).

Для преподавания алгебры студентам компьютерных специальностей в технических вузах часто действуют следующим образом: вначале студенты изучают курс аналитической геометрии и линейной алгебры, обычный для технических университетов, а затем им преподаётся дополнительный курс высшей алгебры, содержащий элементы теории групп, колец, полей, и, возможно, теории представлений ([4]).

На кафедре "Вычислительная математика и математическая физика" Московского Государственного Технического Университета им. Н.Э. Баумана для преподавания курса алгебры студентам, обучающимся по направлению подготовки "Математика и компьютерные науки", был выбран несколько иной подход. Учитывая, что курс высшей алгебры предполагается занимающим один семестр, и, следуя в первую очередь [5] и [6], а также [12] и [3], мы полагаем, что такой курс должен быть прочитан студентам отдельно, до курса линейной алгебры. Единственная тема линейной алгебры, которую мы считаем нужным предварительно рассмотреть в таком курсе — это матрицы и операции над ними. Такой подход имеет свои преимущества. Появляется возможность использовать весь накопленный опыт преподавания таких курсов, написанные для таких курсов учебники и сборники задач, а также возможность изложить необходимый материал, особенно самые базовые, фундаментальные понятия, строго, с достаточной степенью подробности, прежде чем студенты встретятся с этими понятиями в других курсах.

Начальную часть курса алгебры часто называют введением в алгебру, имея в виду, что материал этой части курса должен подготовить студентов к Дневник науки | www.dnevniknauki.ru | СМИ Эл № ФС 77-68405 ISSN 2541-8327

восприятию следующих частей. Перед авторами этой статьи, преподающими данный курс, таким образом, стояла задача не только рассказать о новых для студентов фундаментальных понятиях, которые будут встречаться им в дальнейшем, но и изложить на более высоком уровне понятия и факты, уже знакомые студентам из школьного курса математики.

Первая тема, которой мы считаем нужным уделить внимание, и которая отчасти уже знакома студентам – это свойства натуральных и целых чисел. Для начала мы изучаем со студентами метод математической индукции. Этот способ доказательства утверждений, верных для всех натуральных чисел, будет встречаться студентам во многих математических курсах. В качестве примеров можно доказать методом математической индукции некоторые числовые тождества, например, для суммы квадратов или кубов первых n натуральных чисел

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Также здесь мы рассматриваем элементарную теорию делимости на множестве целых чисел. А именно, нас интересуют понятия простого и составного числа, наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного двух чисел, теорема о делении с остатком на множестве целых чисел, а также так называемая основная теорема арифметики о разложении натуральных чисел в произведение простых.

Заметим, что студенты на самом деле не так хорошо знакомы с этой темой, как требуется в университете. Например, они обычно умеют делить с остатком только большее натуральное число на меньшее, и не умеют в остальных случаях. Наибольший общий делитель они находят на полуинтуитивном уровне и не знакомы с алгоритмом Евклида. В то время, как уже в этом разделе алгебры

им предстоит встретиться с понятиями сравнения по модулю натурального числа и классов вычетов, которые не только дают нам пример конечной абелевой группы, циклической группы для следующего раздела курса алгебры "Элементы теории групп", но и широко используются в современной теории кодирования и криптографии.

Отметим, что в дальнейшем студентам предстоит встретиться с обобщениями понятий простых и составных чисел, наибольшего общего делителя в разделе "Кольца и поля", когда они будут изучать теорию делимости в областях целостности, евклидовы и факториальные кольца. Поэтому авторы полагают, что предварительное изучение соответствующих свойств целых чисел хорошо подготовит их и к восприятию этих новых абстрактных понятий.

Следующим чрезвычайно важным разделом, который необходимо изучить, является часть теории множеств, относящаяся к бинарным отношениям. Бинарные отношения, несомненно, занимают особое место в современной математике и её приложениях, входя в «структурно-понятийный фундамент математики» ([1]). Отметим, что усвоение студентами данной темы обычно вызывает большие трудности, поскольку на первом курсе им особенно тяжело воспринимать формальные определения. Поэтому решение разнообразных задач и упражнений, посвящённых бинарным отношениям ([7], [10]), даёт студентам возможность, изучая разные примеры, лучше понять эти абстрактные понятия. Нас в данном курсе интересуют понятия функции, отношения эквивалентности и отношения порядка, и связанные с ними свойства.

Понятие функции, несомненно, является одним из самых фундаментальных в математике. Студентам предстоит встречаться с ним во всех математических курсах. Нас в разделе "Введение в алгебру" интересуют определение функции, определение и свойства композиции функций, а также определения и свойства, связанные с понятием обратной функции. Опять-таки, проверка функции на наличие обратной, то есть на инъективность и

сюръективность, будет требоваться в самых разных курсах. И в данном курсе мы хотим, чтобы студенты не только потренировались в определении того, является ли данная функция инъективной, сюръективной, и, как следствие, биективной, и нахождении обратной функции, но и изучили все связанные с этим вопросом доказательства, такие как ассоциативность композиции функций, необходимые и достаточные условия существования обратной функции, единственности обратной функции, и другие.

Отметим, что естественным примером, где появляются биективные функции, и который мы можем рассказать сразу же после изучения собственно функций будут подстановки. Несмотря на то, что введение понятия группы предполагается только в следующем разделе курса алгебры, уже в первом разделе мы можем изложить определения подстановки, умножения подстановок, чётности и знака подстановок, циклов и транспозиций, которые пригодятся во втором разделе курса при изучении симметрической группы, а также для введения понятия определителя матрицы.

Следующим после функции идёт понятие отношения эквивалентности. Здесь мы вводим понятия бинарного отношения на множестве, отношения эквивалентности, классов эквивалентности и разбиения, доказываем, что классы эквивалентности образуют разбиение и наоборот. Примером здесь являются классы эквивалентности по отношению сравнимости по модулю натурального числа, то есть классы вычетов.

Часто студенты не до конца понимают насколько фундаментальные и широко распространённые понятия они изучают. Тем удивительней для них, что, оказывается, они уже встречались с отношением эквивалентности, например, в курсе аналитической геометрии, когда изучали понятие вектора.

Отношение порядка – это ещё один пример бинарного отношения, который мы рассматриваем. Обычно ему достаётся меньше внимания, но всё-таки важно обсудить хотя бы самые основные определения: строгого и нестрогого порядка, линейного порядка, наименьшего и минимального

Дневник науки | www.dnevniknauki.ru | СМ И ЭЛ № ФС 77-68405 ISSN 2541-8327

(наибольшего и максимального) элементов. Для тренировки мы предлагаем студентам составить диаграмму Хассе делителей некоторого натурального числа.

Следующим вопросом, который мы считаем нужным обсудить, и который тесно связан с предыдущими темами, является понятие алгебраической операции, в том числе бинарной алгебраической операции, и свойств, которыми может обладать алгебраическая операция, такими как коммутативность и ассоциативность. Здесь намечается прямая связь со следующими разделами курса алгебры, в которых предполагается изучение алгебраических структур, то есть множеств с определёнными на них алгебраическими операциями, удовлетворяющими некоторым свойствам. Отметим, что понятия функции, биективной функции также встретятся в следующих разделах курса для введения понятий гомоморфизмов и изоморфизмов алгебраических структур.

Следующей темой, которую мы считаем нужным по возможности быстро рассмотреть, являются матрицы и операции над ними. Несмотря на то, что этот вопрос является частью линейной алгебры, мы считаем полезным познакомить студентов с матрицами заранее, не только затем, чтобы они могли потренироваться производить с ними вычисления, но и чтобы во втором и третьем разделах курса иметь возможность рассмотреть многочисленные примеры матричных групп и колец.

Последней темой, которую мы рассматриваем в данном разделе, являются комплексные числа. Несмотря на то, что корректно, со всеми доказательствами, мы можем изложить этот вопрос только в рамках теории полей, мы считаем правильным начать знакомиться с этими числами раньше, с тем, чтобы студенты могли тренироваться решать различные задачи с такими числами, например, извлекать корни и решать системы линейных уравнений.

В заключение мы приведём список заданий, которые предлагается выполнить студентам в качестве домашнего задания, а также на контрольной работе. Поскольку студентам важно приобрести навыки выполнения всех Дневник науки | www.dnevniknauki.ru | СМН ЭЛ № ФС 77-68405 ISSN 2541-8327

основных заданий, мы включаем почти все из них в оба эти контрольные мероприятия:

- (1) Найти наибольший общий делитель двух чисел с помощью алгоритма Евклида, и выразить его через исходные числа.
- (2) Определить, является ли данное отображение инъективным, сюръективным, биективным. Найти обратную функцию, если она существует.
- (3) Разложить данную подстановку в произведение независимых циклов, в произведение транспозиций, определить знак подстановки.
- (4) Построить диаграмму делителей данного натурального числа.
- (5) Определить, является ли данная бинарная алгебраическая операция коммутативной, ассоциативной, имеет ли нейтральный элемент.
- (6) Найти корень из данного комплексного числа.

Библиографический список:

- [1] Вечтомов Е. М. О бинарных отношениях для математиков и информатиков // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2012. № 1 (3). С. 51–58.
- [2] Вечтомов Е.М., Чермных В.В. Изучение алгебраической структуры. // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2012. № 1-3. С. 41-48.
- [3] Винберг Э.Б. Курс алгебры. – 2-е изд., испр. и доп. М.: Факториал Пресс, 2001. 544 с.
- [4] Зельвенский И.Г. Преподавание алгебры студентам технических вузов. // Компьютерные инструменты в образовании. 2015. № 3. С. 36–38.
- [5] Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник для вузов в 3 ч. – М.: Физико-математическая литература, 2000. – 272 с. (ч.1), 368 с. (ч.2), 272 с. (ч.3).

[6] Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел: Учеб пособие для педагогических институтов. – М.: Высш. школа, 1979. – 559 с.

[7] Куликов Л.Я., Москаленко А.И., Фомин А.А. Сборник задач по алгебре и теории чисел: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов. – М.: Просвещение, 1993. – 288 с.

[8] Куликова О.В., Куликова И.В. Комплексные задания в обучении математике студентов технических специальностей в транспортном вузе. // Вестник Томского государственного педагогического университета. 2024. № 5 (235). С. 157-166.

[9] Сборник задач по алгебре. Под редакцией А.И. Кострикина. Учебник для вузов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 464 с.

[10] Сборник задач по математике для втузов. В 4 частях. Ч.1: учебное пособие для втузов. Под общ ред. А.В. Ефимова и А.С. Пospelова. – М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 2001. – 288 с.

[11] Симонян Н.В., Симонян А.З. О преподавании линейной алгебры и аналитической геометрии на технических специальностях вузов // Актуальные проблемы преподавания математики в техническом вузе. 2014. №2. С.159-161.

[12] Тыртышников Е.Е. Основы алгебры: учебник. – М.: Физматлит, 2017. – 464 с.

[13] Тыртышников Е.Е. Матричный анализ и линейная алгебра: учебное пособие. – М.: Физматлит, 2007. – 480 с.

[14] Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре: Учебное пособие для вузов. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 416 с.

[15] Хорькова Н.Г., Власов П.А. Методика преподавания линейной алгебры в техническом университете // Modern European Researches. 2025. Т. 1. № 1. С. 109-115.

[16] Эллиот Дж., Добер П. Симметрия в физике: В 2-х томах. Пер. с англ. - М.: Мир, 1983. — 368 с. (Т. 1), 416 с. (Т. 2).