УДК 519.217.2

ОЦЕНКА РЕСУРСНЫХ ЗАТРАТ И ОПТИМИЗАЦИЯ СТРАТЕГИЙ ПОЭТАПНОГО УЛУЧШЕНИЯ ИГРОВОГО СНАРЯЖЕНИЯ НА ОСНОВЕ ПОГЛОЩАЮЩИХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

Ельчанинов М.Н.[1]

магистрант,

Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации (РАНХиГС),

Москва, Россия

Аннотация

В статье предложена математическая модель системы поэтапного улучшения игрового снаряжения в компьютерных ролевых играх на основе поглощающей цепи Маркова. Каждый уровень улучшения представлен переходным состоянием; разрушение предмета и достижение максимального уровня – поглощающими состояниями. Посредством фундаментальной матрицы $N = (I - Q)^{-1}$ получены аналитические формулы ожидаемого числа попыток и суммарных ресурсных затрат с учётом возможных перезапусков. Сформулирована и решена задача оптимизации стратегии игрока: найден оптимальный порог k^* применения защитного механизма. Для шестиуровневой модели получен результат $k^* = 4$ с экономией ресурсов 22% относительно базовой стратегии.

Ключевые слова: поглощающая цепь Маркова, стохастическое моделирование, математическая модель, время поглощения, фундаментальная матрица, оптимальная остановка, динамическое программирование, анализ игровых систем, вероятностная механика.

[1] Научный руководитель – Будник Е. А., кандидат педагогических наук, доцент

ASSESSMENT OF RESOURCE COSTS AND OPTIMIZATION OF STRATEGIES FOR EQUIPMENT ENHANCEMENT BASED ON ABSORBING MARKOV CHAINS

Elchaninov M.N.

Master's student,

Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (RANEPA),

Moscow, Russia

Abstract

The paper proposes a mathematical model of the equipment enhancement system in computer role-playing games based on an absorbing Markov chain. Each enhancement level is a transient state; item destruction and maximum level achievement are absorbing states. Analytical formulas for the expected number of attempts and total resource costs including restarts are derived via the fundamental matrix $N = (I - Q)^{-1}$. A player strategy optimization problem is formulated and solved: the optimal threshold k^* for applying a protective mechanism is found by exhaustive search over threshold strategies. For a six-level model calibrated to real game systems, the result $k^* = 4$ is obtained, yielding a 22% resource saving compared to the baseline strategy.

Key words: absorbing Markov chain, stochastic modelling, mathematical model, absorption time, fundamental matrix, optimal stopping, dynamic programming, game system analysis, probabilistic mechanism.

Компьютерные ролевые игры (RPG) представляют собой один из наиболее популярных жанров современной игровой индустрии. Неотъемлемым элементом большинства RPG-систем является механика улучшения игрового снаряжения – оружия, брони, аксессуаров. Суть механики состоит в том, что игрок затрачивает внутриигровые ресурсы для попытки повысить уровень предмета, при этом каждая попытка имеет вероятностный исход: успех (переход на следующий уровень), неудача (сохранение текущего уровня) либо разрушение предмета [2, 5]. Подобные вероятностные механики получили широкое распространение в мобильных играх с монетизацией на основе случайных вознаграждений [5, 14], однако их математические свойства – в частности, реальные ожидаемые затраты ресурсов – нередко не очевидны ни для игроков, ни для разработчиков [15].

Существующие работы по математическому моделированию вероятностных игровых механик преимущественно сосредоточены на одноэтапных системах: анализе вероятности получения предмета из случайного игрового контейнера [9, 10], оптимизации ценообразования [5, 7] и поведенческом анализе [15]. В то же время многоэтапные системы поэтапного улучшения с возможностью разрушения предмета – характерная черта именно RPG-механик – остаются недостаточно изученными с аналитической точки зрения. Отдельные работы применяют аппарат цепей Маркова для балансировки игровых систем [11, 13] и анализа пошаговых процессов [2, 8], однако задача аналитической оценки затрат ресурсов для поглощающих цепей с несколькими поглощающими состояниями применительно к RPG-улучшению ранее не рассматривалась. Цель настоящей работы – построить такую модель и на её основе вывести аналитические формулы ожидаемых затрат, а также решить задачу оптимизации стратегии игрока.

Вероятностные механики и их экономические модели активно исследуются в литературе. Chen и Fang [5] моделируют последовательные решения игрока о продолжении розыгрышей в системах случайных вознаграждений как марковский процесс принятия решений (MDP) и показывают, что «субсидированные» вероятности определяют поведение покупателя: «Such a sequential decision of the buyer can be modeled by a Markov Decision Process (MDP)». Gan [7] рассматривает оптимальное ценообразование таких систем в рамках теории перспектив и доказывает, что введение детерминированного порога успеха (механизм принудительного выигрыша после заданного числа неудач) максимизирует прибыль разработчика, при этом базовая вероятность успеха составляет около 0,6% при гарантированном успехе на 90-й попытке. Wu и Singh [14] формализуют стратегию системы случайных вознаграждений через вероятность бесплатного получения ключевого предмета и демонстрируют её долгосрочную экономическую эффективность. Данные работы сосредоточены на одноэтапных механиках и не рассматривают многоступенчатые системы с возможностью деградации.

В области балансировки игровых систем методами теории вероятностей и MDP Kavanagh [11] применяет вероятностную проверку моделей и дискретные цепи Маркова для автоматической балансировки многопользовательских игр: «With model checking we can explore all reachable states in a game and consider all feasible strategies, without having to enumerate them manually». Rupp и соавт. [13] решают задачу балансировки уровней методами обучения с подкреплением. Zamith и соавт. [16] предлагают применение скрытых марковских моделей для динамической подстройки сложности. Перечисленные работы подтверждают применимость марковского аппарата к игровым системам, однако фокусируются на балансировке боевых механик.

Для задач оптимальной остановки и распределения ресурсов в стохастических системах Ciocan и Mišić [6] разрабатывают интерпретируемые стратегии, формулируя целевую функцию как задачу нахождения политики, максимизирующей ожидаемое дисконтированное вознаграждение: «Optimal stopping is the problem of deciding when to stop a stochastic system to obtain the greatest reward». Сигал [3] рассматривает оптимизацию распределения ресурсов через аппарат матричных игр и цепей Маркова. Теоретическую основу данного исследования составляет аппарат поглощающих цепей Маркова, изложенный в [12]. Hajihashemi и Aghababaei Samani [8] применяют метод фундаментальной матрицы к многостратегическим эволюционным играм: «Using the fundamental matrix method in the equivalence Markov chain, we can calculate essential concepts in the Markov chain». Строцев и Шестаков [4] используют аналогичный аппарат для оптимизации стратегий диагностирования технических систем, математически изоморфных процессу поэтапного улучшения. Бондаренко и Покуса [2] напрямую указывают на применимость цепей Маркова к расчёту ожидаемых ресурсных затрат в видеоиграх: «Цепи Маркова помогают моделировать... ожидаемое количество попыток или ресурсов, необходимых для достижения определённого результата (например, успешного улучшения предмета)». Таким образом, аналитическое исследование многоэтапного улучшения снаряжения как поглощающей цепи Маркова в литературе в явном виде не рассматривалось.

Рассмотрим систему поэтапного улучшения снаряжения с M уровнями. Процесс улучшения моделируется как дискретная стохастическая система. Множество переходных состояний: $\mathrm{S} = \{0, 1, \dots, M-1\}$ (текущие уровни улучшения). Состояние M является поглощающим состоянием успеха, состояние D – поглощающим состоянием разрушения предмета. Согласно определению из [8]: «If there are states in the Markov chain that leaving these states is impossible, these states are called absorbing states and Markov chain called absorbing Markov chain». При каждой попытке улучшения из состояния $i \in S$ с вероятностью p_i происходит переход в состояние $\mathrm{i}+1$ (успех), с вероятностью s_i – сохранение состояния i (неудача), с вероятностью r_i – переход в состояние D (разрушение), где $p_i + s_i + r_i = 1$.

Упорядочив состояния (сначала переходные, затем поглощающие), матрица переходных вероятностей принимает каноническую форму [8]:

$$P = \begin{pmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где Q – матрица переходов между переходными состояниями $(M \times M)$, R – матрица переходов в поглощающие состояния $(M \times 2)$, I – единичная матрица. Для рассматриваемой системы Q имеет верхнетреугольную структуру с элементами $q_{i,i} = s_i$, $q_{i,i+1} = p_i$, остальные – нулевые; столбцы R соответствуют поглощающим состояниям M и D. Суммы строк матрицы Q не равны единице: недостающая вероятность разрушения r_i учтена в матрице R, поскольку $\sum_j q_{ij} + \sum_j r_{ij} = 1$ для каждого i.

Ключевым инструментом анализа является фундаментальная матрица [8]:

$$N = (I - Q)^{-1} = I + Q + Q^2 + Q^3 + \cdots \qquad (2)$$

Элемент n_{ij} матрицы N – ожидаемое число посещений состояния j, начав из состояния i.

Вектор ожидаемых времён достижения поглощающего состояния $k^A = (k_i^A : i \in S)$ является минимальным неотрицательным решением системы [12]:

$$\begin{cases} k_i^A = 0, & i \in A, \\ k_i^A = 1 + \sum_{j \notin A} p_{ij} k_j^A, & i \notin A. \end{cases} \qquad (3)$$

В матричной форме вектор ожидаемого числа шагов до поглощения [8]:

$$t = N \cdot 1, \qquad (4)$$

где $1 = (1, 1, \ldots, 1)^T$ – вектор единиц. Таким образом, t_i – ожидаемое суммарное число попыток улучшения до достижения одного из поглощающих состояний, начиная с уровня i.

Пусть каждая попытка улучшения требует c единиц ресурса. Тогда ожидаемые ресурсные затраты до первого поглощения:

$$E[C_i] = c \cdot t_i. \qquad (5)$$

Поскольку после разрушения предмета требуется перезапуск с уровня 0, суммарные ожидаемые затраты на достижение уровня M:

$$E[C_0^*] = \frac{E[C_0]}{b_{0,M}}, \tag{6}$$

где $b_{0,M}$ – вероятность поглощения в состоянии M, начиная с состояния 0. Нелинейный рост $E[C_0^*]$ с увеличением числа уровней обусловлен двойным эффектом: числитель $E[C_i] = c \cdot t_i$ возрастает с числом переходных состояний, тогда как знаменатель $b_{0,M}$ убывает вместе с произведением вероятностей перехода p_i по всем уровням, что в совокупности порождает сверхлинейный рост итоговых затрат. Вектор вероятностей достижения множества A является минимальным неотрицательным решением системы [12]:

$$\begin{cases} h_i^A = 1, \quad i \in A, \\ h_i^A = \sum_{j \in S} p_{ij} h_j^A, \quad i \notin A. \end{cases} \tag{7}$$

В матричной форме матрица вероятностей поглощения [8]:

$$B = N \cdot R. \tag{8}$$

В ряде игровых систем игроку доступен защитный механизм – специальный предмет, предотвращающий разрушение снаряжения. При его использовании на уровне i вероятность разрушения r_i обнуляется, $r_i \leftarrow s_i + r_i$, а стоимость попытки возрастает на $c_{\text{пр}}$ единиц. Задача оптимизации: найти порог k^* – минимальный уровень, начиная с которого применение защиты снижает суммарные ожидаемые затраты. Задача формализуется как задача оптимальной остановки [6]. На каждом уровне i игрок выбирает: применять защиту или действовать без неё. Оптимальная политика имеет пороговый вид.

Для нахождения k^* перебираются все допустимые пороги $k \in \{0, 1, \dots, M\}$ (при $k = M$ защита не применяется). Для каждого k строится матрица $Q^{(k)}$, в которой для состояний $i \geq k$: $r_i^{(k)} = 0$, $s_i^{(k)} = s_i + r_i$. Суммарные ожидаемые затраты при стратегии k:

$$E\left[C_0^{*(k)}\right] = \frac{\sum_{i=0}^{M-1} c_i^{(k)} \cdot n_{0i}^{(k)}}{b_{0,M}^{(k)}}, \tag{9}$$

где $c_i^{(k)} = c + c_{пр} \cdot 1[i \geq k]$, $N^{(k)} = \left(I - Q^{(k)}\right)^{-1}$. Оптимальный порог:

$$k^* = arg \min_k E\left[C_0^{*(k)}\right]. \tag{10}$$

Рассмотрим систему с $M = 5$ уровнями улучшения (состояния 0–4 переходные; состояние 5 – успех; D – разрушение). Параметры выбраны в соответствии с типичными значениями вероятностей для реальных игровых систем, обоснованными в работах [5, 7, 10] (таблица 1).

Таблица 1 – Параметры модели системы поэтапного улучшения снаряжения

Уровень i	**p_i (успех)**	**s_i (сохранение)**	**r_i (разрушение)**
0	0,85	0,15	0,00
1	0,70	0,30	0,00
2	0,50	0,45	0,05
3	0,30	0,60	0,15
4	0,15	0,65	0,20

Стоимость одной попытки: $c = 1$ у.е.; стоимость защиты: $c_{\text{пр}} = 1$ у.е. за попытку. Матрица Q в соответствии с формулой (1):

$$Q = \begin{pmatrix} 0{,}15 & 0{,}85 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}00 & 0{,}30 & 0{,}70 & 0{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}45 & 0{,}50 & 0{,}00 \\ 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}60 & 0{,}30 \\ 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}65 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

матрица R (столбцы: состояния 5 и D):

$$R = \begin{pmatrix} 0{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}00 & 0{,}05 \\ 0{,}00 & 0{,}10 \\ 0{,}15 & 0{,}20 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Матрица $(I - Q)$ имеет верхнетреугольную структуру, что позволяет вычислить $N = (I - Q)^{-1}$ по формуле (2) аналитически методом обратной подстановки. Диагональные элементы $n_{ii} = 1/(1 - s_i)$: $n_{00} \approx 1{,}18$, $n_{11} \approx 1{,}43$, $n_{22} \approx 1{,}82$, $n_{33} = 2{,}50$, $n_{44} \approx 2{,}86$.

По формулам (4) и (8) вычислены ожидаемое число попыток до поглощения и вероятности поглощения (таблица 2).

Таблица 2 – Характеристики поглощения системы по формулам (4) и (8)

Уровень i	**t_i попыток**	**$b_{i,5}$ (P успеха)**	**$b_{i,D}$ (P разрушения)**
0	8,64	0,292	0,708
1	7,47	0,292	0,708
2	6,04	0,292	0,708
3	4,64	0,321	0,679
4	2,86	0,429	0,571

Равенство $b_{0,5} = b_{1,5} = b_{2,5}$ объясняется тем, что на уровнях 0 и 1 разрушение невозможно ($r_0 = r_1 = 0$), поэтому переход из состояния 0 в состояние 2 является достоверным.

Суммарные ожидаемые затраты без защиты по формуле (6): $E[C_0^*] = 8{,}64/0{,}292 \approx 29{,}59$ у.е. Применим алгоритм (9)–(10), перебирая пороги k при $c_{\text{пр}} = 1$ у.е. (таблица 3).

Таблица 3 – Сравнение пороговых стратегий применения защитного механизма

Стратегия k	**$b_{0,5}$ (P успеха)**	**$E\left[C_0^{(k)}\right]$, у.е.**	**$E\left[C_0^{*(k)}\right]$, у.е.**
$k = M$	0,292	8,64	29,59
$k = 4$	0,682	15,8	23,17
$k = 3$	0,909	22,60	24,86
$k = 2$	1,000	26,61	26,61

Раскроем вычисления для оптимальной стратегии $k = 4$ (защита применяется только на уровне +4). При использовании защиты вероятность разрушения обнуляется: $r_4' = 0, s_4' = s_4 + r_4 = 0{,}8$. Модифицированный диагональный элемент фундаментальной матрицы: $n_{44}' = 1/(1 - s_4') = 1/0{,}15 \approx 6{,}67$. Для состояний 0–3, не затронутых защитой, элементы фундаментальной матрицы совпадают с исходными для нижних уровней ($n_{ii}' = n_{ii}$ при $i < 4$). Внедиагональный элемент $n_{34}' = p_3 \cdot n_{44}'/(1 - s_3) = 0{,}30 \times 6{,}67/0{,}40 = 5{,}00$. Ожидаемое число посещений уровня 4 из начального состояния: $n_{04}' \approx 4{,}55$. Данное значение меньше $n_{44}' \approx 6{,}67$, поскольку с вероятностью $1 - b_{0,5}' \approx 0{,}32$ предмет разрушается на уровнях 2 или 3, не достигнув уровня 4. Вероятность итогового успеха $b_{0,5}' = n_{04}' \cdot p_4 = 4{,}55 \times 0{,}15 \approx 0{,}682$. Затраты до поглощения по формуле (9) при $c_i^{(4)} = 1$ для $i \leq 3$ $c_4^{(4)} = 2$:

$$E\left[C_0^{(4)}\right] = (1{,}18 + 1{,}43 + 1{,}82 + 2{,}27) + 4{,}55 \cdot 2 = 15{,}8 \text{ у.е.}$$

Итого: $E\left[C_0^{*(4)}\right] = 15{,}8/0{,}682 \approx 23{,}17$ у.е. При стратегии $k = 3$ (защита на уровнях 3–4) вероятность успеха возрастает до 0,909, однако затраты до поглощения увеличиваются до 22,60 у.е., что даёт $E\left[C_0^{*(3)}\right] = 22{,}60/0{,}909 \approx 24{,}86$ у.е. Дальнейшее расширение зоны защиты ($k = 2$) повышает вероятность успеха до 1,000, однако суммарные затраты возрастают до 26,61 у.е. из-за избыточных расходов на защиту низкорисковых уровней.

На рисунке 1 представлена зависимость $E\left[C_0^{*(k)}\right]$ от порога k, демонстрирующая наличие чёткого минимума при $k^* = 4$.

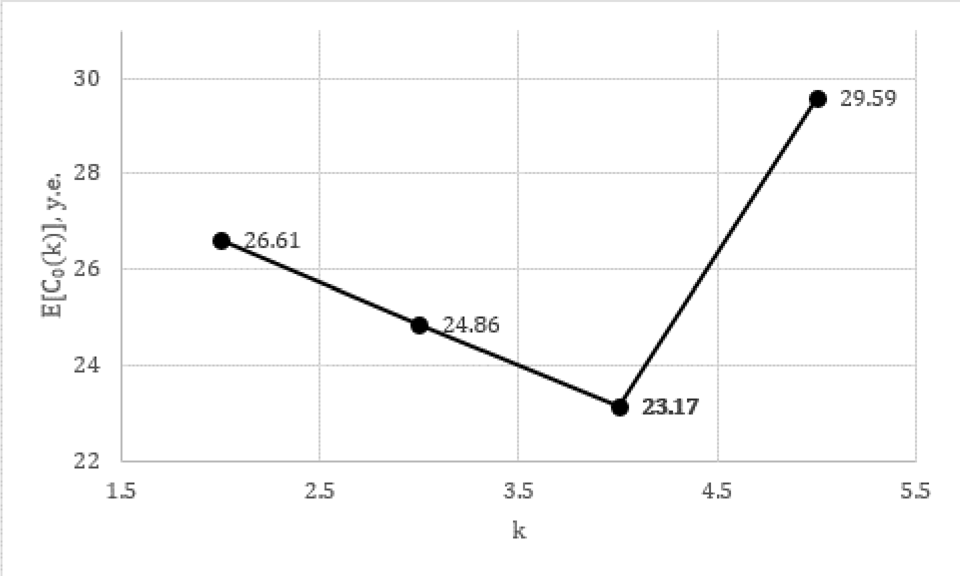

Рис. 1 – Зависимость ожидаемых суммарных затрат $E\left[C_0^{*(k)}\right]$ от порога применения защитного механизма k

Таким образом, $k^* = 4$: оптимальная стратегия предписывает применять защитный механизм только на уровне +4, где вероятность разрушения максимальна $r_4 = 0{,}20$. Несмотря на то, что уровень 3 также подвержен разрушению ($r_3 = 0{,}10$), дополнительные затраты на защиту не окупаются: переход от стратегии $k = 4$ к $k = 3$ увеличивает затраты до поглощения с 15,8 до 22,60 у.е. при менее чем двукратном росте вероятности успеха (с 0,682 до 0,909). На уровнях 0–2 риск разрушения отсутствует либо пренебрежимо мал ($r_0 = r_1 = 0,\ r_2 = 0{,}05$).

В данной работе разработана математическая модель системы поэтапного улучшения игрового снаряжения на основе поглощающей цепи Маркова. Модель учитывает три типа исходов каждой попытки: успех, сохранение уровня и разрушение предмета. Получены аналитические формулы ожидаемого числа попыток и ресурсных затрат через фундаментальную матрицу $N = (I - Q)^{-1}$ и матрицу вероятностей поглощения $B = N \cdot R$. Показано, что суммарные ожидаемые затраты с учётом перезапусков определяются формулой $E[C_0^*] = E[C_0]/b_{0,M}$ и возрастают сверхлинейно с ростом числа уровней –

вследствие одновременного увеличения числителя и убывания знаменателя, как показано при выводе формулы (6). Сформулирована и решена задача оптимизации стратегии игрока: в численном примере найден оптимальный порог $k^* = 4$, снижающий суммарные ожидаемые затраты с 29,59 до 23,17 у.е. (экономия 22%).

Установлено, что как недостаточная, так и избыточная защита ведут к росту затрат. Полученные результаты применимы при проектировании и балансировке игровых экономических систем, а также рациональном планировании ресурсов игроком при ограниченном бюджете. Перспективным направлением является обобщение модели на случай динамически изменяемых вероятностей успеха [1].

Библиографический список:

1. Авербух, Ю. В. Вероятностные методы анализа игровых задач управления : специальность 05.13.01 «Системный анализ, управление и обработка информации» : дис. ... д-ра физ.-мат. наук / Авербух Юрий Владимирович ; Уральский федеральный университет. – Екатеринбург, 2020. – 316 с.

2. Бондаренко, Д. В. Применение цепей Маркова в разработке видеоигр / Д. В. Бондаренко, Т. В. Покуса // Международный студенческий научный вестник. – 2026. – № 1. – С. 1–5.

3. Сигал, А. В. Моделирование процессов оптимального распределения ресурсов на основе решения антагонистических игр / А. В. Сигал // Экономика и математические методы. – 2015. – Т. 51, № 2. – С. 82–97.

4. Строцев, А. А. Методика оптимизации стратегии технического диагностирования на основе модели марковской цепи / А. А. Строцев, Г. А.

Шестаков // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. – 2013. – № 4. – С. 56–63.

5. Chen, C. Gacha game analysis and design / C. Chen, Z. Fang // Proceedings of the ACM on Measurement and Analysis of Computing Systems. – 2023. – Vol. 7, № 1. – Art. 7.

6. Ciocan, D. F. Interpretable optimal stopping / D. F. Ciocan, V. V. Mišić // Management Science. – 2022. – Vol. 68, № 3. – P. 1616–1638.

7. Gan, T. Gacha game: when prospect theory meets optimal pricing / T. Gan. – 2022. – URL: https://arxiv.org/abs/2208.03602 (дата обращения: 01.06.2026). – Текст : электронный.

8. Hajihashemi, M. Multi-strategy evolutionary games: a Markov chain approach / M. Hajihashemi, K. Aghababaei Samani // PLOS ONE. – 2022. – Vol. 17, № 2. – Art. e0263979.

9. Han, J. Algorithms for loot box design / J. Han, C. T. Ryan, X. T. Tong // Operations Research. – 2026. – URL: https://doi.org/10.1287/opre.2023.0026 (дата обращения: 01.06.2026). – Текст : электронный.

10. Kao, D. Infinite loot box: a platform for simulating video game loot boxes / D. Kao // IEEE Transactions on Games. – 2020. – Vol. 12, № 2. – P. 137–143.

11. Kavanagh, W. Using probabilistic model checking to balance games : PhD thesis / W. Kavanagh. – Glasgow : University of Glasgow, 2021.

12. Norris, J. R. Markov Chains / J. R. Norris. – Cambridge : Cambridge University Press, 1997. – 237 p.

13. Simulation-driven balancing of competitive game levels with reinforcement learning / F. Rupp, A. Bauer, N. Berner, U. Kamps // IEEE Transactions on Games. – 2024. – Vol. 16, № 2. – P. 1–12.

14. Wu, J. Implementing stochastic products selling in mobile games: is gacha just gambling? / J. Wu, D. Singh // Journal of Electronic Commerce Research. – 2023. – Vol. 24, № 4. – P. 225–243.

15. Xiao, L. Y. Probability disclosures are not enough: reducing loot box reward complexity as a part of ethical video game design / L. Y. Xiao, P. W. S. Newall // Journal of Gambling Issues. – 2022. – № 49. – P. 1–27.

16. Zamith, M. Applying hidden Markov model for dynamic game balancing / M. Zamith [et al.] // Proceedings of the IEEE Conference on Computer Games (CoG). – 2020. – P. 1–4.