

УДК 519.85

*АНАЛИТИЧЕСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ЗАВИСИМОСТИ РЕШЕНИЯ
ОТ ФИКСИРОВАННЫХ ДОПЛАТ В ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧЕ*

Ковалева В.Е.

студент,

Российский университет транспорта (МИИТ),

Москва, Россия

Иванова А.П.

к.ф.-м.н., доцент

Российский университет транспорта (МИИТ),

Москва, Россия

Аннотация:

В работе рассматривается транспортная задача с фиксированными доплатами и анализируется влияние размера фиксированных затрат на структуру оптимального плана перевозок. Задача решается приближённо методом Балинского. На основе вычислительного эксперимента, проведённого на большом массиве случайно сгенерированных данных, получена усреднённая зависимость изменения решения от размера фиксированных затрат. Для описания экспериментальной кривой выполнена аппроксимация несколькими функциями методом наименьших квадратов, проведено сравнение качества моделей и выбрана функция, наиболее точно отражающая характер изменения зависимости. В качестве итоговой аппроксимации принята функция с горизонтальной асимптотой, что согласуется с наблюдаемым поведением решения при больших значениях фиксированных затрат.

Ключевые слова: транспортная задача с фиксированными доплатами, метод Балинского, метод наименьших квадратов.

ANALYTICAL APPROXIMATION OF THE DEPENDENCE OF THE SOLUTION ON FIXED FEES IN THE TRANSPORTATION PROBLEM

Kovaleva V.E.

student,

Russian University of Transport (MIIT),

Moscow, Russia

Ivanova A.P.

Ph.D., Associate Professor

Russian University of Transport (MIIT),

Moscow, Russia

Abstract: The paper considers a transportation problem with fixed additional charges and analyzes the effect of the size of fixed costs on the structure of the optimal transportation plan. The problem is solved approximately using the Balinski method. Based on a computational experiment conducted on a large set of randomly generated data, an averaged dependence of the change in the solution on the size of fixed costs is obtained. To describe the experimental curve, several functions are approximated using the least squares method, and the quality of the models is compared. The function that most accurately reflects the nature of the dependence is selected. As the final approximation, a function with a horizontal asymptote is adopted, which is consistent with the observed behavior of the solution for large values of fixed costs.

Keywords: transport problem with fixed surcharges, Balinski's method, least squares method.

Данная работа является продолжением исследования, начатого в [1,4], и опирается на полученные там результаты. Поэтому, прежде чем перейти к новым построениям, кратко напомним постановку транспортной задачи с фиксированными доплатами [8].

Пусть задана транспортная сеть, включающая m пунктов производства и n пунктов потребления. Обозначим через $a_i > 0$ объём продукции в пункте i , через $b_j > 0$ – потребность в пункте j , через $x_{ij} \geq 0$ – объём перевозок из пункта i в пункт j , а через $c_{ij}(x_{ij})$ – переменные затраты на перевозку единицы груза. Тогда транспортная задача формулируется как задача минимизации функции [5]:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}(x_{ij}) \rightarrow \min$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad x_{ij} \geq 0,$$

и условии сбалансированности:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

В случае учёта фиксированных доплат функция затрат на перевозку продукта принимает вид:

$$c_{ij}(x_{ij}) = \begin{cases} 0, & x_{ij} = 0, \\ c_{ij}x_{ij} + d_{ij}, & x_{ij} > 0, \end{cases}$$

где $d_{ij} \geq 0$ – фиксированные затраты, не зависящие от объёма перевозок. Такая постановка делает задачу нелинейной и существенно усложняет её решение.

Для сведения задачи к удобной форме вводятся бинарные переменные:

$$y_{ij} = \begin{cases} 0, & x_{ij} = 0, \\ 1, & x_{ij} > 0, \end{cases}$$

а также линейные ограничения:

$$0 \leq x_{ij} \leq M_{ij}y_{ij},$$

где

$$M_{ij} = \min(a_i, b_j).$$

Тогда задача может быть записана в виде частично целочисленного программирования с целевой функцией:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (c_{ij}x_{ij} + d_{ij}y_{ij}) \rightarrow \min.$$

Для приближённого решения используется метод Балинского, основанный на замене переменных [8]:

$$y_{ij} = \frac{x_{ij}}{M_{ij}}.$$

Подставляя это выражение в целевую функцию, получаем:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(c_{ij} + \frac{d_{ij}}{M_{ij}} \right) x_{ij},$$

где введены модифицированные коэффициенты затрат:

$$c'_{ij} = c_{ij} + \frac{d_{ij}}{M_{ij}}.$$

Таким образом, исходная задача сводится к классической транспортной задаче с новыми коэффициентами.

В [1,4] для анализа влияния фиксированных затрат вводился коэффициент масштабирования λ , такой что:

$$D_{ij} = \lambda d_{ij}.$$

В качестве меры изменения решения будем использовать величину:

$$\Delta(\lambda) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |x_{ij}^{\lambda} - x_{ij}^0|.$$

В [1] было установлено, что для отдельной случайной реализации задачи зависимость $\Delta(\lambda)$ имеет ступенчатый, кусочно-постоянный характер, однако при усреднении по достаточно большому числу случайных реализаций ступенчатые скачки сглаживаются, и зависимость приобретает гладкий монотонно возрастающий вид. Именно эта усреднённая кривая и представляет интерес для дальнейшего теоретического анализа.

Для аналитической обработки в настоящей работе количество экспериментов было увеличено: усреднение проводилось по 100 случайным

реализациям задачи, а параметр λ варьировался от 0,1 до 495,1 с шагом 5, что дало в общей сложности $N = 100$ экспериментальных точек (λ_i, Δ_i) . Соответствующий график приведён на рис. 1.

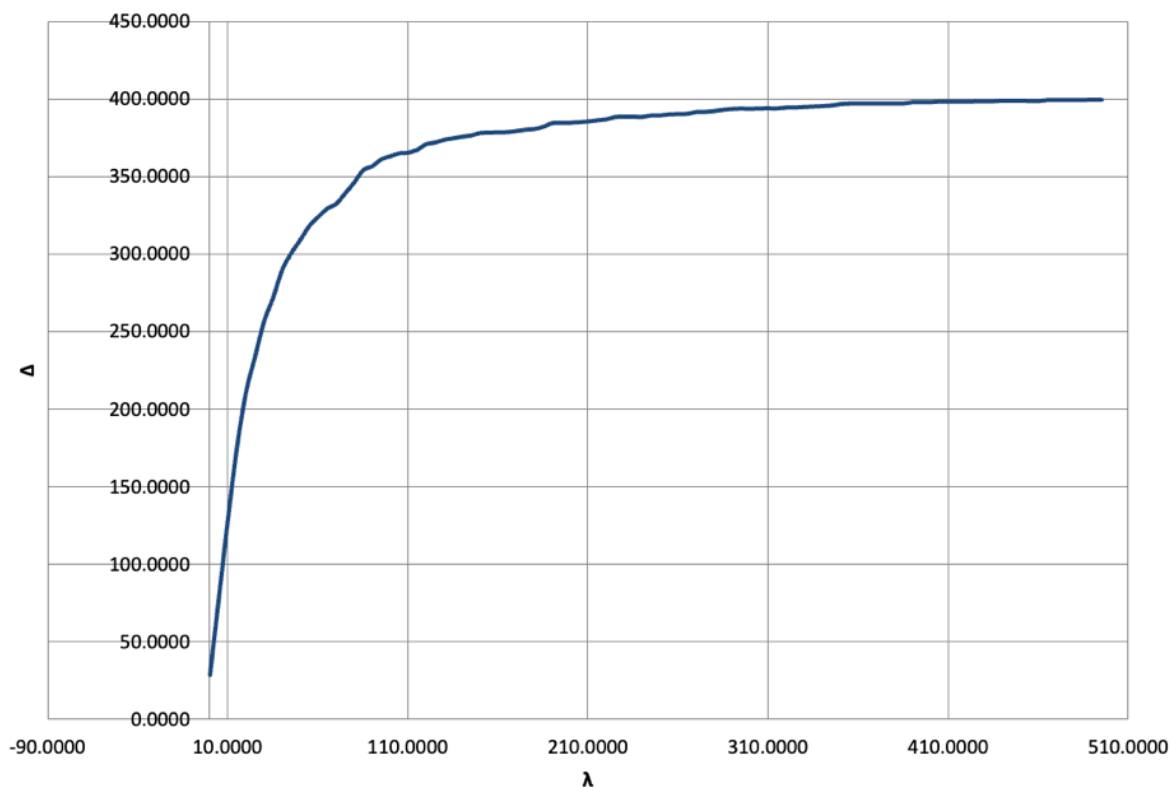


Рис 1. – График экспериментальной зависимости $\Delta(\lambda)$. Авторская разработка

При таком объёме статистики кривая стала практически гладкой, а характер зависимости проявился отчётливее: на начальном участке величина Δ растёт очень быстро, а затем рост замедляется, и при значении коэффициента λ порядка нескольких сотен значения Δ выходят на плато $\Delta \approx 399$, так как при достаточно больших фиксированных доплатах структура оптимального плана стабилизируется.

Целью данной работы является подбор аналитической функции $y = y(\lambda)$, аппроксимирующей экспериментальную зависимость $\Delta(\lambda)$. Конкретная форма функции должна согласовываться с двумя качественными особенностями кривой: быстрым ростом при малых коэффициента масштабирования λ и наличием горизонтальной асимптоты при $\lambda \rightarrow \infty$.

Применим метод наименьших квадратов (МНК) для подбора теоретической зависимости [2,7,12]. Будем тестировать следующие функции вида $y = f_k(a_k, b_k, \lambda)$:

$$f_1: \quad y = a_1 + \frac{b_1}{\lambda},$$

$$f_2: \quad y = a_2 + \frac{b_2}{\sqrt{\lambda}},$$

$$f_3: \quad y = a_3 + \frac{b_3}{\sqrt[3]{\lambda}},$$

$$f_4: \quad y = a_4 + b_4 \ln \lambda.$$

Для каждой из функций параметры a_k и b_k определяются согласно МНК из условия минимума суммы квадратов отклонений теоретических значений от экспериментальных [2,7,12]:

$$S_k = \sum_{i=1}^N (f_k(a_k, b_k, \lambda_i) - y_i)^2 \rightarrow \min.$$

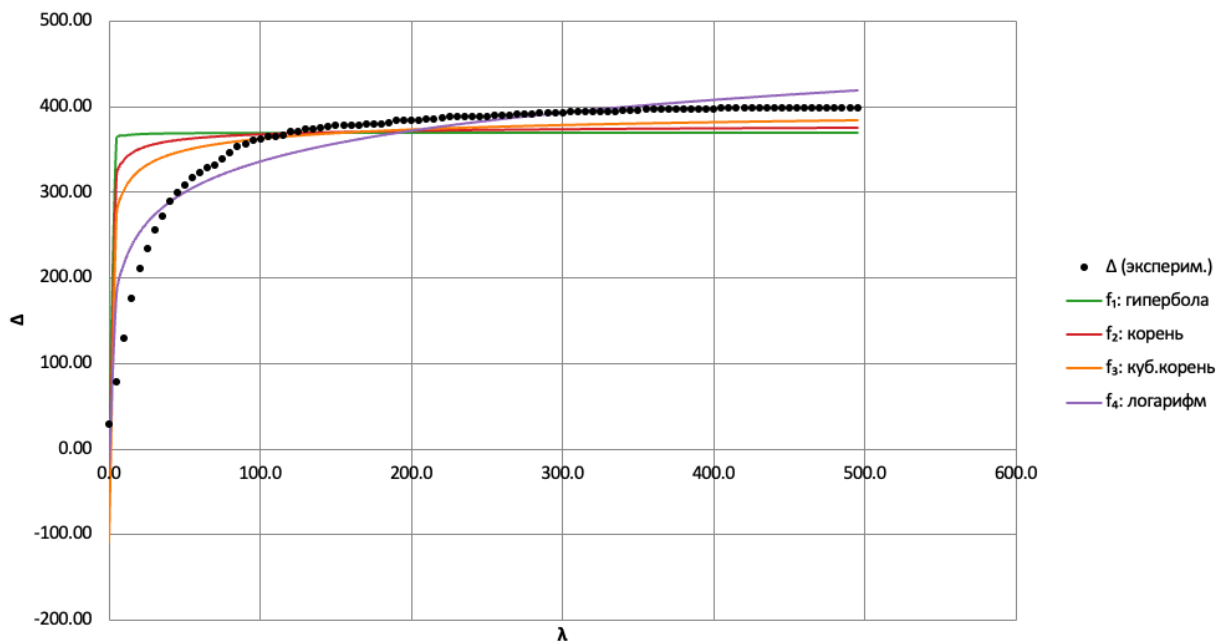
Поскольку каждая из функций f_k линейна относительно параметров a_k и b_k , задача МНК сводится к решению системы нормальных уравнений.

Качество аппроксимации характеризуется двумя показателями: суммой квадратов отклонений S_k (чем S_k меньше, тем точнее модель описывает данные) и коэффициентом детерминации:

$$R_k^2 = 1 - \frac{S_k}{S_{\text{tot}}}, \quad S_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2,$$

где \bar{y} – среднее арифметическое величин y_i , который принимает значения от 0 до 1 и показывает, какую долю дисперсии экспериментальных данных объясняет модель (чем R_k^2 больше, тем лучше предложенная модель регрессии объясняет экспериментальные данные).

На рис. 2 показано, как выглядят все четыре аппроксимации на фоне экспериментальных точек.

Рис. 2. – Аппроксимация зависимости $\Delta(\lambda)$ разными видами кривых.

Авторская разработка

Результаты расчётов для всех четырёх функций $f_k(a_k, b_k, \lambda_i)$ сведены в таблицу 1.

Таблица 1. – Сравнение регрессионных моделей ($N = 100$). Авторская разработка

Функция	Уравнение регрессии	S_k	R_k^2	Асимптота
f_1	$y = 369,18 - \frac{35,20}{\lambda}$	302 837	0,288	$y = 369,18$
f_2	$y = 381,24 - \frac{139,61}{\sqrt{\lambda}}$	235 762	0,446	$y = 381,24$
f_3	$y = 414,98 - \frac{243,40}{\sqrt[3]{\lambda}}$	165 569	0,611	$y = 414,98$
f_4	$y = 97,05 + 51,96 \ln \lambda$	46 560	0,891	нет

Наименьшее отклонение $S_k = 46\,560$ и наибольший коэффициент детерминации $R^2 = 0,891$ достигаются на логарифмической модели f_4 . Однако функция $y = 97,05 + 51,96 \ln \lambda$ неограниченно возрастает при $\lambda \rightarrow \infty$, тогда как реальная величина Δ ограничена сверху, что видно по графику на рис. 1. Логарифмическая модель f_4 этого не учитывает и потому некорректна при экстраполяции.

Функции f_1 , f_2 и f_3 лишены этого недостатка: все три имеют горизонтальную асимптоту $y = a_k$. Из них наилучшее качество аппроксимации обеспечивает f_3 ($R^2 = 0,611$, асимптота $y = 414,98$), однако её асимптота заметно выше наблюдаемой по результатам вычислительного эксперимента $\Delta \approx 399$. Функция f_2 ($R^2 = 0,446$) имеет асимптоту $y = 381,24$ – наиболее близкую к экспериментальному значению, расхождение составляет около 4,5%. Поэтому в качестве итоговой аппроксимирующей зависимости принята функция f_2 :

$$\Delta(\lambda) \approx 381,24 - \frac{139,61}{\sqrt{\lambda}}$$

Заключение. На основании проведённых исследований можно сделать следующие выводы. Выявлена характерная усреднённая зависимость изменения решения от величины фиксированных затрат с использованием масштабирующего коэффициента λ . Экспериментально установлено, что при малых значениях параметра λ график зависимости быстро возрастает, а при дальнейшем увеличении – выходит на плато, что свидетельствует о стабилизации структуры оптимального плана.

Для аналитического описания полученной зависимости были рассмотрены и сопоставлены различные аппроксимирующие функции. Наилучшее качество аппроксимации среди моделей с горизонтальной асимптотой продемонстрировала функция вида $y = a_2 + \frac{b_2}{\sqrt{\lambda}}$, параметры которой определены методом наименьших квадратов. Эта модель отражает как быстрый начальный рост, так и выход на асимптоту при больших значениях параметра λ .

Библиографический список:

1. Абрамова О.А., Иванова А.П. Исследование влияния фиксированных доплат на структуру решений транспортной задачи // Дневник науки. – 2026. – № 4 [Электронный ресурс]. (Дата обращения 10.05.2026).
2. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика и основы эконометрики: Учебник. – М.: ЮНИТИ, 1998. – 1005 с.
3. Ашманов С.А. Линейное программирование. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1981. – 340 с.
4. Базюта А.С., Иванова А.П. Исследование эффективности метода Балинского для решения транспортных задач с фиксированными доплатами // Инженерный вестник Дона. – 2026. – № 4 [Электронный ресурс]: URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2026/11043.
5. Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Задачи линейного программирования транспортного типа. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1969. – 384 с.
6. Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И. Линейное и выпуклое программирование. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1969. – 382 с.
7. Иванова А.П., Родина Е.В., Чумерина Е.С. Эконометрика. Часть 1: Учебное пособие по дисциплине «Эконометрика». – М.: РУТ (МИИТ), 2022. – 48 с.
8. Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1969. – 368 с.
9. Кремер Н.Ш., Путко Б.А. Эконометрика: учебник для студентов вузов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. – 311 с.
10. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.Б. Математическое программирование. – М.: Высшая школа, 1980. – 300 с.
11. Сигал И.Х., Иванова А.П. Введение в прикладное дискретное программирование: модели и вычислительные алгоритмы. Учеб. пособ. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 304 с.
12. Эконометрика. Под ред. И.И. Елисеевой. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 344 с.