

УДК 519.6

## ***ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ФРОНТА ГОРЕНИЯ***

***Захаров А.А.***

*к.ф.-м.н., доцент,*

*Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет),*

*г. Москва, Россия*

***Дубровский Д.М.***

*студент*

*Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет),*

*г. Москва, Россия*

### **Аннотация.**

В работе рассматривается задача численного моделирования изменения поверхности фронта при регрессии сложной трёхмерной геометрии. Предложен алгоритм геометрической эволюции триангулированной поверхности, основанный на последовательном смещении узлов сетки по нормали и последующей обработке самопересечений. Разработан каскадный метод обнаружения пересечений элементов, включающий фильтрацию по ограничивающим боксам, выровненным по осям координат, анализ знаковых расстояний и точный тест пересечения треугольников с использованием алгоритма Моллера-Трумбора. Представлен подход к восстановлению

корректной топологии поверхности с использованием локальной ретриангуляции Делоне и удалением выгоревших областей. Реализация алгоритма выполнена в виде программного прототипа и протестирована на модели со сложной формой внутреннего канала. В результате вычислений был получен график изменения площади поверхности фронта горения от номера итерации процесса. Полученные результаты демонстрируют работоспособность метода при моделировании геометрической регрессии поверхности.

**Ключевые слова:** фронт горения, численное моделирование, ограничивающие боксы, триангуляция, алгоритм Моллера-Трумбора, знаковые расстояния, поверхностная сетка, самопересечения.

## ***NUMERICAL SIMULATION OF CHANGES IN THE SURFACE OF THE BURNING FRONT***

***Zakharov A.A.***

*Ph.D., assistant professor,*

*Bauman Moscow State Technical University (National Research University),*

*Moscow, Russia*

***Dubrovsky D.M.***

*student*

*Bauman Moscow State Technical University (National Research University),*

*Moscow, Russia*

**Abstract.**

This paper addresses the problem of numerical modeling of combustion front surface evolution during the regression of a complex three-dimensional geometry. An algorithm for the geometric evolution of a triangulated surface is proposed, based on the sequential displacement of mesh nodes along the normal direction followed by the handling of self-intersections. A cascaded method for detecting element intersections is developed, incorporating filtering using axis-aligned bounding boxes, analysis of signed distances, and an exact triangle intersection test using the Möller–Trumbore algorithm. An approach to restoring correct surface topology is presented, utilizing local Delaunay retriangulation and removal of burned-out regions. The algorithm was implemented as a software prototype and tested on a model featuring a complex internal channel geometry. Computational results yielded a graph of combustion front surface area change versus process iteration number. The obtained results demonstrate the method's functionality in modeling geometric surface regression.

**Keywords:** the burning front, numerical modeling, bounding boxes, triangulation, Möller–Trumbore algorithm, sign distances, surface mesh, self-intersections.

**Введение.**

Моделирование движения поверхности фронта горения для сложно геометрии является важной задачей прикладной математики и численного моделирования [1, 2, 3]. Подобные задачи возникают при анализе процессов эрозии, деградации материалов, а также при исследовании регрессии поверхностей в системах, где форма объекта с течением времени существенно изменяется. Особую важность представляет численное описание эволюции поверхностей со сложной топологией, когда в ходе движения возможны самопересечения и локальные разрушения структуры. В некоторых работах [4]

движущиеся границы описывают с использованием объёмных методов, требующих построения трёхмерных сеток. Однако в ряде задач более эффективным является явное представление границы в виде триангулированной поверхностной сетки. При таком подходе ключевой проблемой становится поддержание геометрической корректности поверхности в процессе её эволюции. Целью работы является разработка численного алгоритма геометрической эволюции триангулированной поверхности, описывающего регрессию поверхности сложной формы при её смещении по нормали с обработкой возникающих самопересечений. Предложенный алгоритм основан на пошаговом смещении узлов сетки, каскадном обнаружении пересечений элементов и локальной ретриангуляции. Разработанный подход может применяться при моделировании процессов, сопровождающихся изменением формы поверхностей сложной геометрии, где требуется явное отслеживание границы без построения объёмной расчётной сетки.

**Математическая постановка задачи.** Согласно [5], поверхность горения  $S(t)$  описывается уравнением  $f(x^i, t) = 0$ , где  $x^i$  – координата в декартовом базисе  $\vec{e}_i$ ,  $t$  – время. Движение поверхности фронта горения описывается кинематическим уравнением, связывающим изменение функции  $f$  во времени с пространственным градиентом:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c\nabla f = 0,$$

где  $c$  – скорость перемещения точки поверхности.

Введём нормальную скорость движения поверхности  $D$ , определяемую как проекция вектора скорости на направление внешней нормали  $n$ :

$$D = c \cdot n.$$

С учётом этого уравнение движения поверхности принимает вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + D|\nabla f| = 0.$$

Данное уравнение описывает эволюцию поверхности, движущейся по нормали с заданной нормальной скоростью. Полученную формулу можно переписать в следующем виде, подходящем для описания выполнения работы по моделированию изменения поверхности фронта горения:

$$x_j^i = x_{j-1}^i - D \cdot n_j^i,$$

где индекс  $j$  – номер итерации.

**Алгоритм численной реализации.** В численной реализации поверхность фронта аппроксимируется триангулированной сеткой. Эволюция поверхности моделируется дискретно: на каждом шаге узлы сетки смещаются вдоль нормали на величину шага регрессии. После смещения возможно нарушение геометрической корректности поверхности, в частности возникновение самопересечений треугольной поверхности. Для выявления пересечений между треугольниками используется каскадный алгоритм, позволяющий сократить вычислительные затраты. На первом этапе выполняется проверка пересечения ограничивающих боксов (axis-aligned bounding box, AABB) [6], что позволяет быстро исключить заведомо непересекающиеся пары элементов. Для прошедших предварительный отбор пар выполняется более точная проверка

взаимного расположения треугольников с использованием знаковых расстояний [7] до плоскостей элементов. На заключительном этапе применяется алгоритм Моллера-Трумбора [8], позволяющий точно определить факт пересечения.

В случае обнаружения пересечения двух треугольников производится вычисление точек пересечения их рёбер [9, 10]. В результате вычисления формируется набор точек, принадлежащих области пересечения треугольников. Для восстановления корректной геометрии выполняется локальная ретриангуляция в области пересечения. С этой целью точки пересечения и вершины исходных элементов переводятся в локальную систему координат, связанную с плоскостью рассматриваемого участка поверхности. На полученном множестве точек строится новая триангуляция, например, с использованием критерия Делоне [11].

После выполнения ретриангуляции исходные пересекающиеся элементы удаляются, а на их месте формируется новая согласованная сетка. Для обеспечения корректности глобальной структуры поверхности выполняется анализ связности элементов и удаление некорректных или изолированных компонент, например с помощью поиска в ширину (Breadth-First Search).

**Результат моделирования.** Созданный алгоритм моделирования поверхности фронта горения формирует результат в виде триангулированной поверхности, пригодной для визуализации. Для визуализации использовалась библиотека VTK (Visualization Toolkit). На каждом шаге моделирования вычислялась площадь внутренней поверхности геометрии, соответствующей фронту горения, с последующим построением зависимости площади от номера итерации.

В качестве расчётной области рассматривалась цилиндрическая геометрия с формой канала типа finocyl (finned cylindrical) (см. рис. 1, 2).

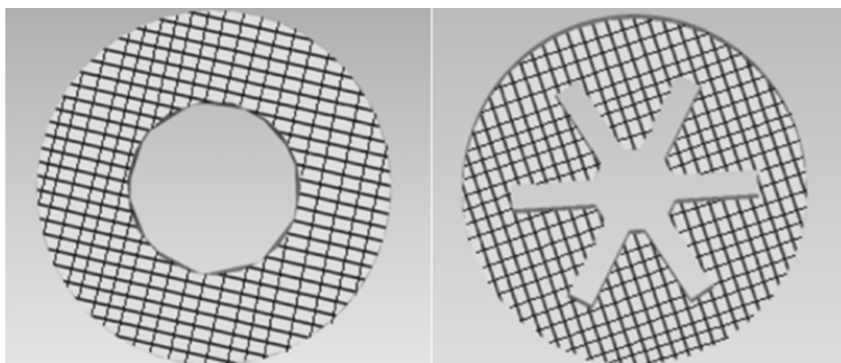


Рис. 1. Двумерная схема канала.

Авторская разработка.

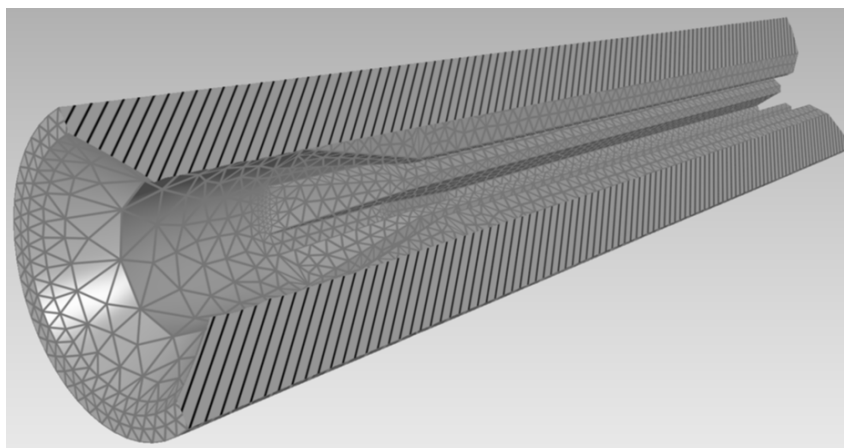


Рис. 2. Продольный разрез геометрии.

Авторская разработка.

Для анализа процесса были выбраны характерные этапы эволюции поверхности фронта горения. На начальном этапе (рис. 3, 4) наблюдается сближение внутренней поверхности с внешней границей без изменения топологии канала. В этот период реализуется прогрессивный режим горения, при котором площадь поверхности увеличивается за счёт роста эффективного внутреннего радиуса.

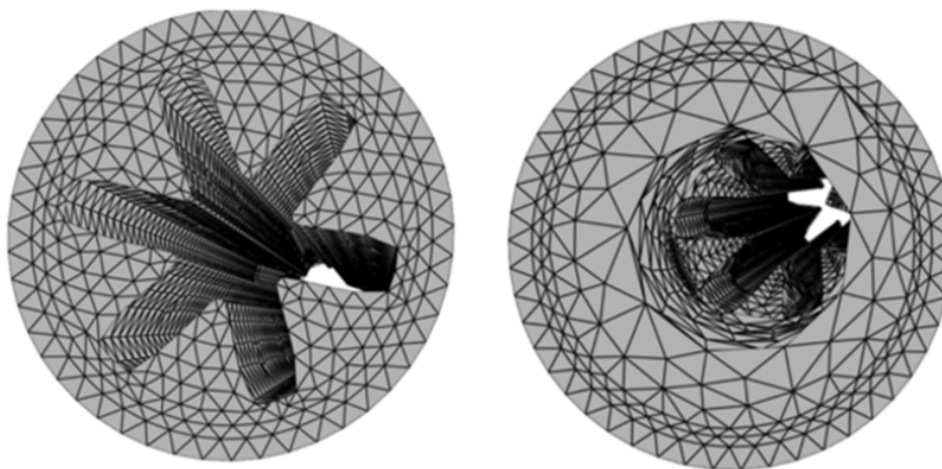


Рис. 3. Начальный этап (вид спереди и сзади).

Авторская разработка.

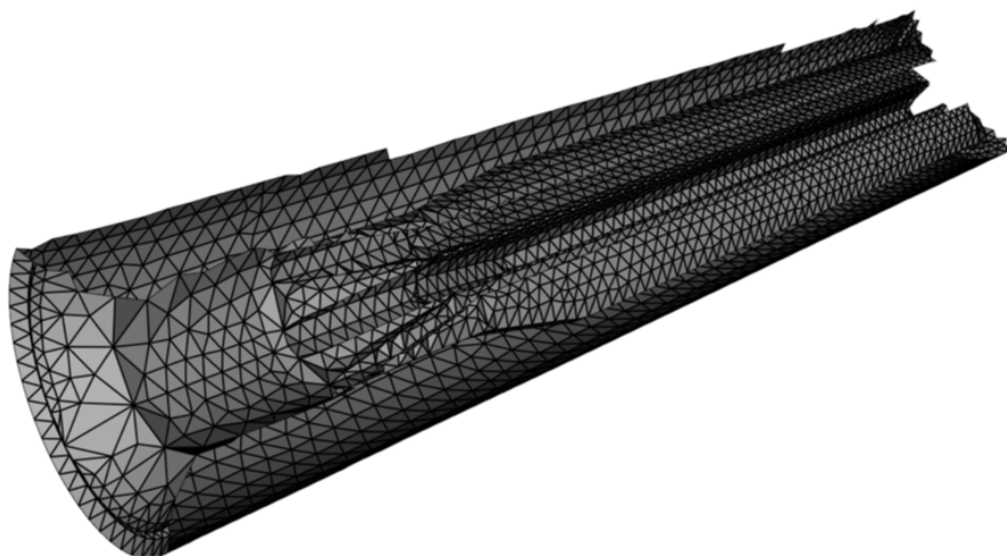


Рис. 4. Продольный разрез геометрии на начальном этапе.

Авторская разработка.

На промежуточном этапе (рис. 5, 6) происходит изменение топологии поверхности, сопровождающееся пересечением элементов и выгоранием отдельных участков геометрии. Это приводит к переходу к регрессивному режиму горения. Наиболее интенсивная деградация наблюдается в областях, соответствующих лучам шестиконечной звезды, поскольку они расположены

ближе к границе камеры сгорания. В то же время цилиндрическая часть канала продолжает увеличивать свою площадь вплоть до достижения внешней оболочки.

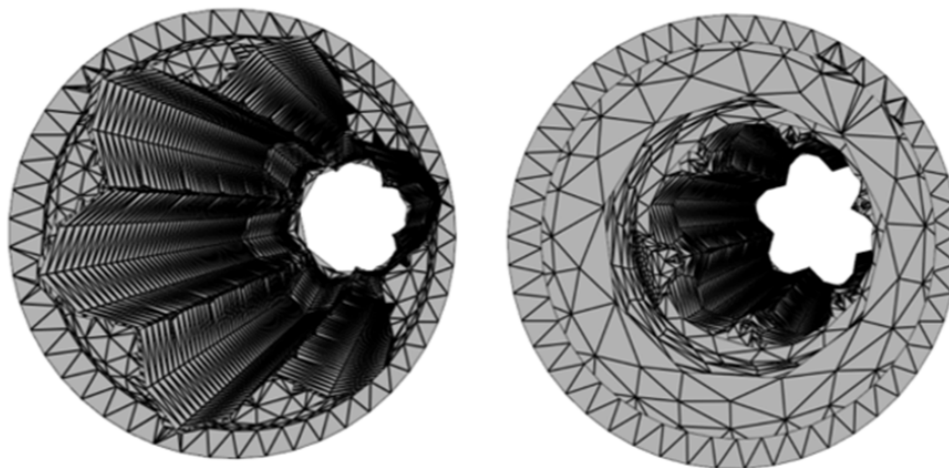


Рис. 5. Вид спереди и сзади на промежуточном этапе.

Авторская разработка.

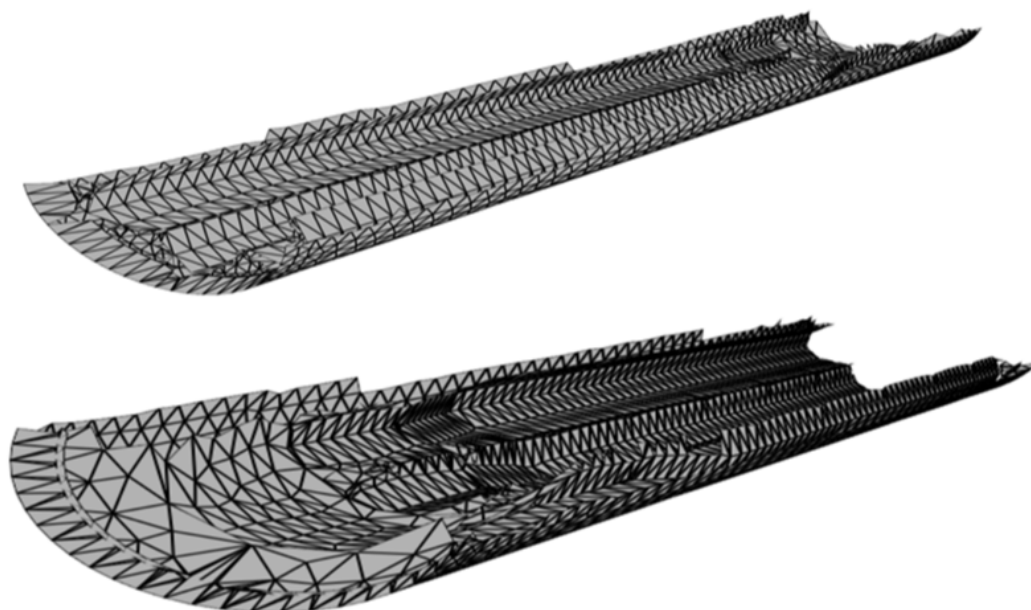


Рис. 6. Продольный разрез геометрии на промежуточном этапе.

Авторская разработка.

На заключительном этапе (рис. 7, 8) происходит практически полное выгорание геометрии, что сопровождается резким уменьшением площади поверхности фронта горения и завершением процесса.

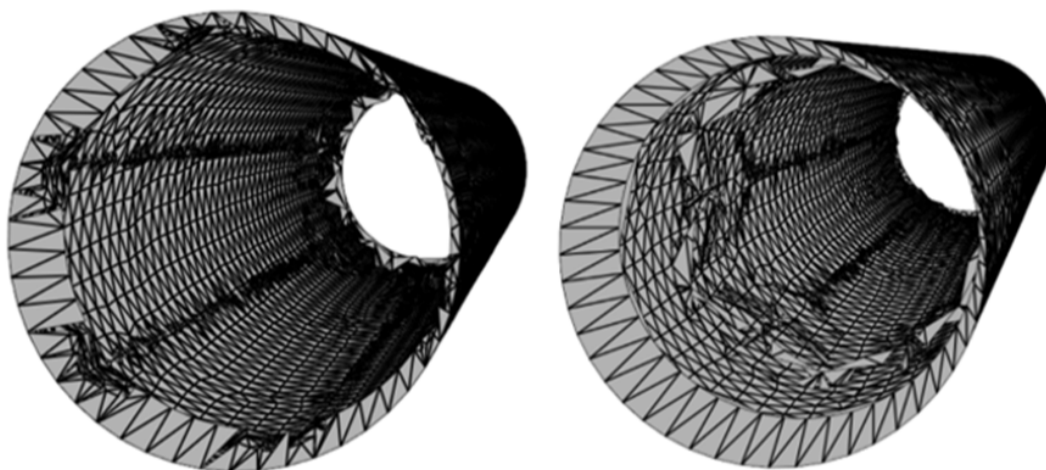


Рис. 7. Вид спереди и сзади на заключительном этапе.

Авторская разработка.

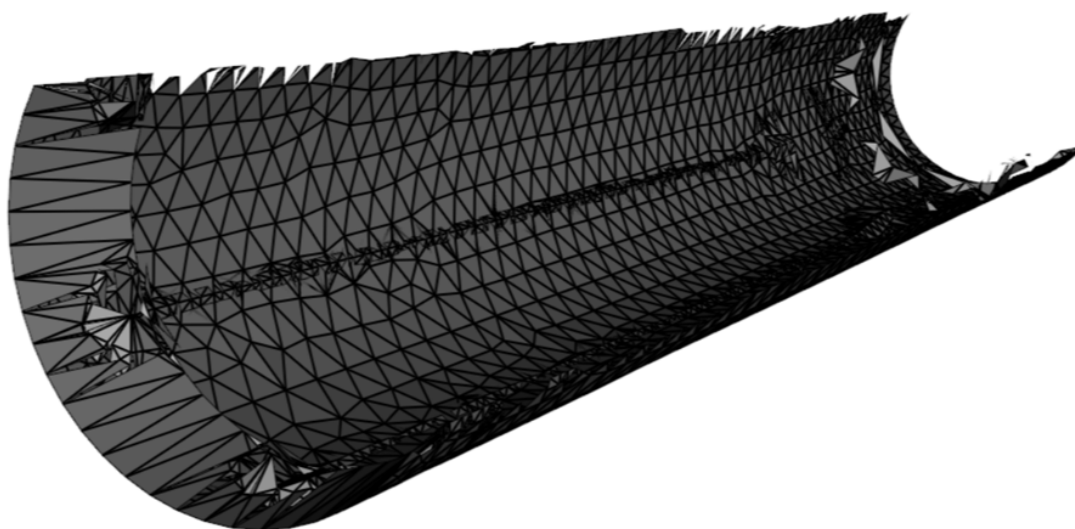


Рис. 8. Продольный разрез геометрии на заключительном этапе.

Авторская разработка.

Зависимость площади поверхности фронта горения от номера итерации представлена на рис. 9. Анализ графика показывает наличие характерных стадий процесса: начального увеличения площади, последующего снижения вследствие выгорания элементов сложной геометрии и финального резкого уменьшения площади на завершающем этапе горения.

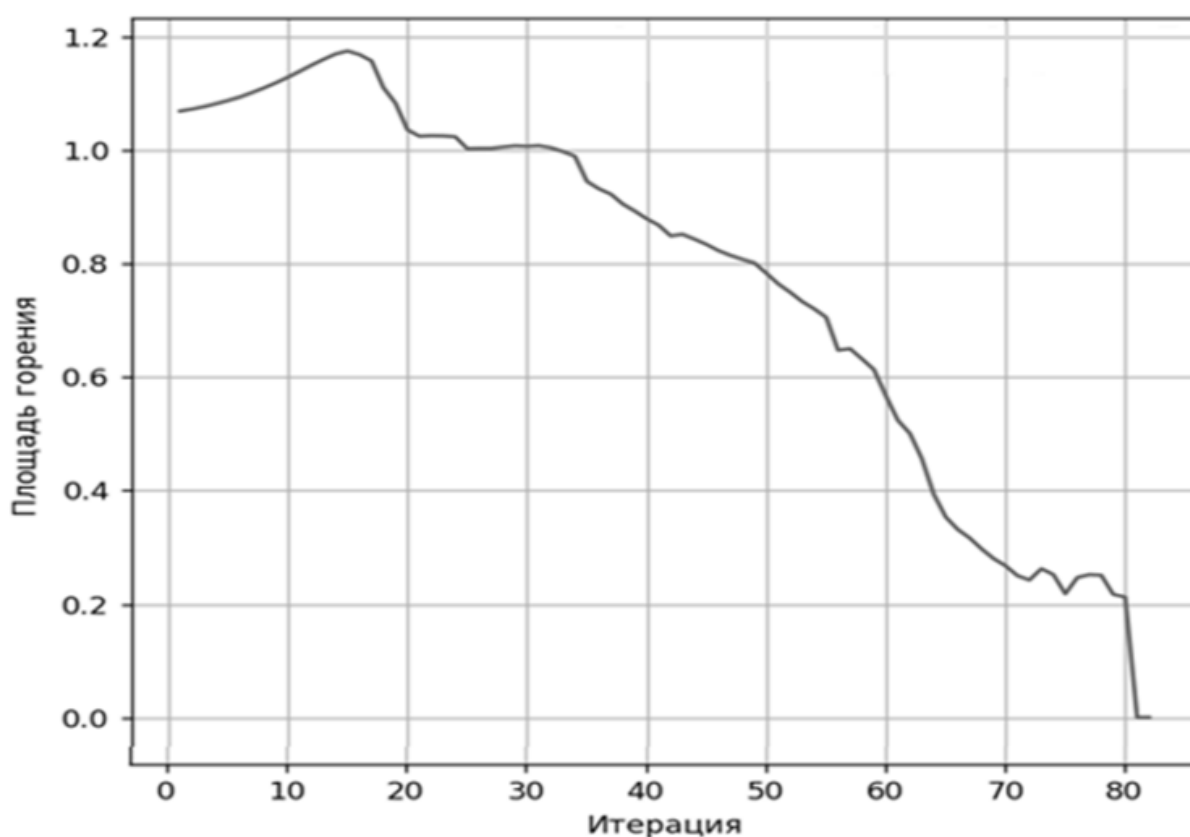


Рис. 9. График изменения площади поверхности фронта горения.

Авторская разработка.

**Заключение.** Проведённый численный эксперимент продемонстрировал корректность моделирования эволюции поверхности горения для заряда типа *finosyl*. Полученные результаты согласуются с физическими закономерностями процесса [1] и подтверждают работоспособность разработанного алгоритма. Анализ графиков и визуализации расчётной сетки на различных этапах

Дневник науки | [www.dnevniknauki.ru](http://www.dnevniknauki.ru) | СМИ Эл № ФС 77-68405 ISSN 2541-8327

показывают корректность определения точек пересечения треугольников и последующей ретриангуляции. Таким образом, предложенный подход может быть использован для численного моделирования задач внутренней баллистики с изменяющейся геометрией поверхности горения.

### Библиографический список.

1. Willcox M.A. Solid Rocket Motor Internal Ballistics Simulation Using Three-Dimensional Grain Burnback / M.A. Willcox, M.Q. Brewster, K.C. Tang, D.S. Stewart, I. Kuznetsov // *Journal of Propulsion and Power*. – 2007. – Vol. 23, No. 3. – P. 575–587. – DOI: 10.2514/1.22971.
2. Nisar K. A Hybrid Optimization Approach for SRM FINOCYL Grain Design / K. Nisar, L. Guozhu, Q. Zeeshan // *Chinese Journal of Aeronautics*. – 2008. – Vol. 21, No. 6. – P. 481–487.
3. Püskülcü G. 3-D grain burnback analysis of solid propellant rocket motors: Part 1 – ballistic motor tests / G. Püskülcü, A. Ulas // *Aerospace Science and Technology*. – 2008. – Vol. 12, No. 8. – P. 579–584. – DOI: 10.1016/j.ast.2008.02.001.
4. G.R. Anjos, N. Borhani, N. Mangiavacchi, J.R. Thome, A 3D moving mesh Finite Element Method for two-phase flows, *Journal of Computational Physics*, Volume 270, 2014, Pages 366-377, ISSN 0021-9991.
5. Димитриенко Ю.И. Нелинейная механика сплошной среды. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009 — 624 с.
6. Real-Time Collision Detection / C. Ericson // Morgan Kaufmann – 2005. – 632 p.
7. J. J. Park, P. Florence, J. Straub, R. Newcombe and S. Lovegrove, "DeepSDF: Learning Continuous Signed Distance Functions for Shape Representation," 2019 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern

Recognition (CVPR), Long Beach, CA, USA, 2019, pp. 165-174, doi: 10.1109/CVPR.2019.00025.

8. Möller T. Fast, Minimum Storage Ray-Triangle Intersection [Электронный ресурс] / T. Möller, B. Trumbore // Journal of Graphics Tools. — 1997. — Vol. 2, № 1. — P. 21–28, doi: 10.1080/10867651.1997.10487468

9. Geometric Tools for Computer Graphics / P. Schneider, D. Eberly // Morgan Kaufmann — 2003. — 1056 p.

10. Препарата Ф. Вычислительная геометрия: Введение [Текст] / Ф. Препарата, М. Шеймос ; пер. с англ. С. А. Вичеса, М. М. Комарова ; под ред. Ю. М. Баяковского. — Москва : Мир, 1989. — 478 с. — ISBN 5-03-001041-6.

11. Берг М. де. Вычислительная геометрия. Алгоритмы и приложения: учебное пособие / М. де Берг, О. Чеонг, М. ван Кревельд, М. Овермарс ; пер. с англ. А. А. Слинкин. — 3-е изд. — Москва : ДМК Пресс, 2017. — 438 с. — ISBN 978-5-97060-406-9.