УДК 519.85

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ФИКСИРОВАННЫХ ДОПЛАТ НА СТРУКТУРУ РЕШЕНИЙ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

Абрамова О.А.
студент,
Российский университет транспорта (МИИТ),
Москва, Россия
Иванова А.П.
к.ф.-м.н., доцент
Российский университет транспорта (МИИТ),
Москва, Россия

Аннотация:
В работе исследуется транспортная задача с фиксированными доплатами. Рассмотрен метод Балинского для сведения задачи с фиксированными доплатами к линейной транспортной задаче. Разработана программная реализация на языке Python, а также проведён вычислительный эксперимент на случайно сгенерированных данных. Показано, что при увеличении параметра масштабирования фиксированных затрат наблюдаются скачкообразные изменения в структуре оптимального плана перевозок. Экспериментально установлено, что при малых значениях параметра решение устойчиво, а при его увеличении происходят резкие переходы, связанные со сменой базисных переменных. При усреднении по нескольким реализациям задачи графики сглаживаются за счёт различия точек смены структуры решения.

Ключевые слова: транспортная задача с фиксированными доплатами, задача линейного программирования, частично целочисленная задача линейного программирования, метод Балинского.

STUDY OF THE EFFECT OF FIXED SUPPLEMENTS ON THE STRUCTURE OF TRANSPORT PROBLEM SOLUTIONS

Abramova O.A.
student,
Russian University of Transport (MIIT),
Moscow, Russia
Ivanova A.P.
Ph.D., Associate Professor
Russian University of Transport (MIIT),
Moscow, Russia

Abstract: The paper studies a transportation problem with fixed additional charges. The Balinski method is used to reduce the problem with fixed additional charges to a linear transportation problem. A software implementation in Python is developed, and a computational experiment is conducted using randomly generated data. It is shown that as the scaling parameter of fixed costs increases, there are abrupt changes in the structure of the optimal transportation plan. It is experimentally established that for small values of the parameter, the solution is stable, but as the parameter increases, there are abrupt transitions associated with changes in the basis variables. When averaging over several problem implementations, the graphs are smoothed out due to the difference in the points where the solution structure changes.
Keywords: transportation problem with fixed surcharges, linear programming problem, partially integer linear programming problem, Balinski method.

Алгоритмы оптимизации транспортных потоков находят широкое применение в логистике, экономике, управлении цепями поставок и других областях. Особое место среди них занимает транспортная задача, позволяющая определить оптимальный план перевозок с минимальными затратами. В классической постановке учитываются только переменные издержки, зависящие от объёма перевозимого груза. Однако в реальных условиях значительную роль играют фиксированные затраты, не зависящие от объёма перевозок. К ним относятся расходы на аренду транспорта, организацию маршрутов, инфраструктуру и другие сопутствующие издержки.

Целью данной работы является исследование влияния фиксированных затрат на структуру оптимального плана перевозок.

Пусть задана транспортная сеть состоит из m пунктов производства и n пунктов потребления однородного продукта. Обозначим через $a_i > 0$ объём производства в пункте i, через $b_j > 0$ – потребность в пункте j, через $x_{ij} \geq 0$ – объём перевозок из пункта i в пункт j, а через $c_{ij}(x_{ij})$ – переменные затраты на перевозку единицы груза. Тогда задача формулируется следующим образом [7]:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}(x_{ij}) \to \min, \qquad (1)$$

где

$$c_{ij}(x_{ij}) = \begin{cases} 0, & x_{ij} = 0, \\ c_{ij}x_{ij} + d_{ij}, & x_{ij} > 0, \end{cases} \qquad (2)$$

здесь постоянные c_{ij} – затраты на перевозку единицы продукта из пункта i в пункт j, d_{ij} – затраты, которые не зависят от объёма перевозок x_{ij} (например, могут складываться из затрат на погрузку в пункте i и затрат на разгрузку в пункте j).

Условия удовлетворения спроса во всех пунктах потребления:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \ldots n. \qquad (3)$$

Условия вывоза всего продукта из всех пунктов производства:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \ldots m. \qquad (4)$$

Будем предполагать, что задача замкнутая:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \,, \tag{5}$$

Условие (5) является необходимым и достаточным условием разрешимости (сбалансированности) транспортной задачи [7,9].

Такая постановка делает транспортную задачу нелинейной и существенно усложняет её решение. Для сведения задачи к удобной форме введём бинарные переменные:

$$y_{ij} = \begin{cases} 0, \\ 1, \end{cases} \quad i = 1, 2, \ldots m, \quad j = 1, 2, \ldots n \tag{6}$$

и дополнительные ограничения вида:

$$x_{ij} \le M_{ij} y_{ij}\,, \quad i = 1, 2, \ldots m, \quad j = 1, 2, \ldots n\,, \tag{7}$$

где

$$M_{ij} = \min\{a_i, b_j\} - \tag{8}$$

максимально возможный объём перевозки по маршруту (i,j).

Тогда задача может быть записана в виде задачи частично целочисленного программирования с целевой функцией:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (c_{ij} x_{ij} + d_{ij} y_{ij}) \to \min\,. \tag{9}$$

Для приближённого решения используется метод Балинского [7], основанный на замене переменных:

$$y_{ij} = \frac{x_{ij}}{M_{ij}}\,. \tag{10}$$

Подставляя (10) в целевую функцию (9), получаем линейную целевую функцию вида:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(c_{ij} + \frac{d_{ij}}{M_{ij}} \right) x_{ij} \to \min\,, \tag{11}$$

где введены модифицированные коэффициенты затрат:

$$c'_{ij} = c_{ij} + \frac{d_{ij}}{M_{ij}}.$$

Таким образом, исходная задача сводится к классической транспортной задаче (11), (3), (4) с новыми коэффициентами.

Для реализации метода Балинского была разработана программа на языке Python с использованием библиотек NumPy и SciPy. Функция initial_plan строит допустимый план методом минимального элемента, при котором на каждой итерации выбирается клетка с минимальной модифицированной стоимостью c'_{ij} (см. рис. 1).

```
def initial_plan(c_prime, a, b):
    m, n = len(a), len(b)
    x = np.zeros((m, n))
    supply, demand = a.copy(), b.copy()

    while supply.any() and demand.any():
        masked = np.where(
            (supply[:, None] > 0) & (demand[None, :] > 0),
            c_prime,
            np.inf
        )
        i, j = np.unravel_index(np.argmin(masked), c_prime.shape)
        q = min(supply[i], demand[j])

        x[i, j] += q
        supply[i] -= q
        demand[j] -= q

    return x
```

Рис. 1. – Функция построения начального опорного плана методом минимального элемента. Авторская разработка.

Функция solve сводит транспортную задачу с фиксированными доплатами к классической транспортной задаче и решает её с использованием функции линейного программирования linprog встроенной библиотеки SciPy (классическая транспортная задача является задачей линейного программирования и решается с помощью симплекс-метода [1, 3, 4, 8]). В результате находится оптимальный план перевозок для модифицированной задачи (см. рис. 2).

```python
def solve(c, a, b, d, verbose=False):
    c, a, b, d = (np.array(v, dtype=float) for v in (c, a, b, d))
    m, n = len(a), len(b)

    M = np.minimum(a[:, None], b[None, :])
    c_prime = np.round(c + d / M, 4)

    A_eq = np.zeros((m + n, m * n))
    b_eq = np.concatenate([a, b])

    for i in range(m):
        A_eq[i, i*n:(i+1)*n] = 1
    for j in range(n):
        A_eq[m + j, j::n] = 1

    bounds = [(0, M[i, j]) for i in range(m) for j in range(n)]

    res = linprog(
        c_prime.flatten(),
        A_eq=A_eq,
        b_eq=b_eq,
        bounds=bounds,
        method='highs'
    )

    if res.success:
        x = res.x.reshape(m, n)
        x[x < 1e-9] = 0.0
    else:
        x = initial_plan(c_prime, a, b)

    return {"x": x}
```

Рис. 2. – Функция реализации метода Балинского. Авторская разработка.

Для исследования эффективности метода будем использовать случайно сгенерированные задачи. Размеры предложения и спроса сформируем случайным образом с последующей балансировкой. Матрицу переменных затрат будем генерировать как случайную целочисленная величина, а фиксированные доплаты определим по формуле:

$$d_{ij} = round\left(\frac{W}{m \cdot n} r_{ij}, 1\right), \quad W = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij},$$

где $r_{ij} \in [0,1]$.

Подробно процесс генерации случайных тестовых задач описан в работе [2], где проводилось исследование метода Балинского с использованием Mathcad Prime.

Для анализа влияния фиксированных затрат введём параметр масштабирования λ:

$$D_{ij} = \lambda \cdot d_{ij}.$$

В качестве меры изменения решения используем величину:

$$W = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left| x_{ij}^{\lambda} - x_{ij}^{0} \right|,$$

где x_{ij}^{λ} – полученное решение транспортной задачи с фиксированными доплатами, x_{ij}^{0} – решение классической транспортной задачи без доплат.

Фрагмент программы вычислительного эксперимента (см. рис. 3).

```python
if __name__ == "__main__":
    lambdas   = np.arange(0.1, 10.1, 0.1)
    runs_list = [1, 25, 50, 100]

    fig = plt.figure(figsize=(18, 7))

    fig.text(
        0.5, 0.97,
        "λ (лямбда) — коэффициент масштабирования фиксированных доплат.",
        ha="center", va="top", fontsize=12, color="dimgray", style="italic"
    )
    fig.text(
        0.5, 0.91,
        "При λ = 0 доплаты отсутствуют (базовый план x(0))."
        "При λ = 1 — базовые значения dᵢⱼ, пропорциональные средней переменной стоимости.\
        "При λ > 1 доплаты возрастают: алгоритм сокращает число активных маршрутов,"
        " концентрируя объёмы на наиболее выгодных.",
        ha="center", va="top", fontsize=11, color="dimgray", style="italic"
    )

    # —— Четыре графика в один ряд ——————————————————————————————————————
    for col, num_runs in enumerate(runs_list):
        avg_plan = run_averaged(num_runs, lambdas)

        ax = fig.add_subplot(1, 4, col + 1)
        ax.plot(lambdas, avg_plan, color="steelblue", linewidth=1.8)
        ax.set_xlabel("λ", fontsize=11)
        ax.set_ylabel("Σ|x(λ) − x(0)|", fontsize=11)
        ax.set_title(f"{num_runs} запусков", fontsize=11)
        ax.grid(alpha=0.4)

    fig.suptitle(
        "Влияние λ на отклонение плана от базового: Σ|x(λ) − x(0)|",
        fontsize=13, y=0.83
    )

    plt.subplots_adjust(top=0.78, bottom=0.10, left=0.06, right=0.98, wspace=0.35)
    plt.savefig("/tmp/experiment_result.png", dpi=150, bbox_inches="tight")
```

Рис. 3. – Программная реализация вычислительного эксперимента. Авторская разработка.

Эксперимент проводился при различных значениях параметра λ, а также при усреднении результатов по 1, 25 и 50 случайным реализациям задачи. Результаты исследования представлены на рисунке 4.

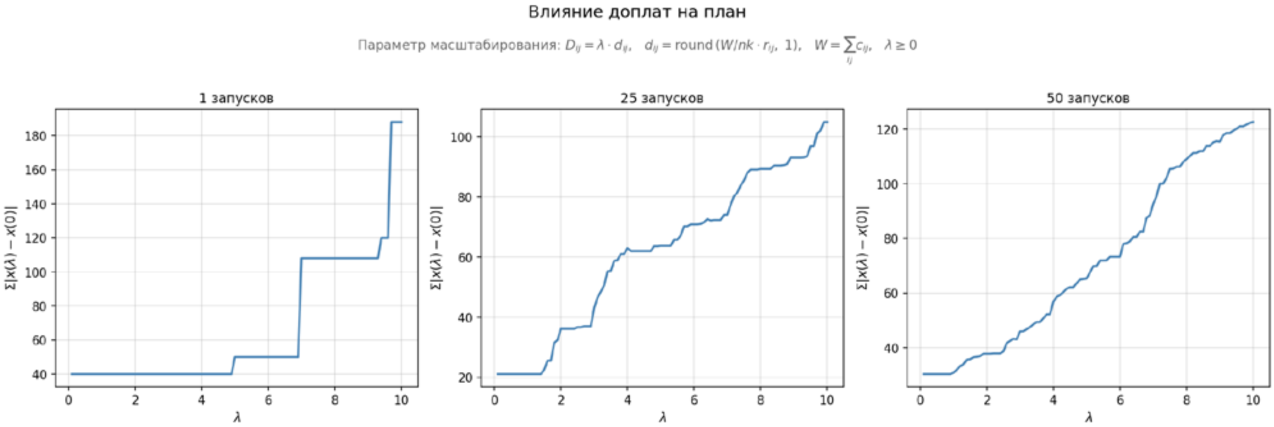

Рис. 4. – Влияние фиксированных доплат на структуру плана перевозок. Авторская разработка.

В ходе экспериментов было установлено, что при малых значениях параметра λ оптимальный план остаётся неизменным или изменяется незначительно. Это свидетельствует об устойчивости решения к малым возмущениям (увеличениям доплат). При увеличении параметра λ наблюдаются скачкообразные изменения плана, связанные со сменой базисных переменных. Зависимость имеет выраженный кусочно-постоянный характер: интервалы стабильности чередуются с резкими переходами.

При усреднении результатов по нескольким реализациям наблюдается сглаживание графиков, что объясняется различием точек смены структуры решения для разных случайных задач.

Заключение. На основании проведённых исследований можно сделать следующие выводы: фиксированные доплаты оказывают существенное влияние на структуру оптимального плана перевозок; при малых значениях доплат решение устойчиво; при увеличении доплат происходят скачкообразные изменения решения.

Библиографический список:

1. Ашманов С.А. Линейное программирование. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1981. – 340 с.

2. Базюта А.С., Иванова А.П. // Инженерный вестник Дона. – 2026. – № 4 [Электронный ресурс]: URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2026/11043.

3. Глушков А.А. Оптимизация транспортных затрат с учётом фиксированных доплат: модель задачи и алгоритмы решения // Вестник науки. – 2024. – №9 (78). – Т. 3. – С. 517-522.

4. Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Задачи линейного программирования транспортного типа. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1969. – 384 с.

5. Ефимов Р.А., Иванова А.П. Задачи транспортного типа: Учебное пособие по дисциплине «Математическое моделирование». – М.: РУТ (МИИТ), Янус-К, 2023. – 112 с.

6. Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И. Линейное и выпуклое программирование. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1969. – 382 с.

7. Иванова А.П. Теория графов. Часть 2: учебное пособие по дисциплине «Теория графов». – М.: РУТ (МИИТ), Янус-К, 2026. – 99 с.

8. Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1969. – 368 с.

9. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.Б. Математическое программирование. – М.: Высшая школа, 1980. – 300 с.

10. Сигал И.Х., Иванова А.П. Введение в прикладное дискретное программирование: модели и вычислительные алгоритмы. Учеб. пособ. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 304 с.