УДК: 517.927

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ С ОБОБЩЕННЫМИ НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ТИПА НЕЙМАНА НА ОТРЕЗКЕ

Покровский И.Л.,

к.ф.-м.н., доцент,

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)

Москва, Россия

Прозоровский А.А.,

старший преподаватель, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)

Москва, Россия

Аннотация: В настоящей работе рассмотрена краевая задача на конечном отрезке с нелокальными граничными условиями, обобщающие граничные условия Неймана, получено уравнение для нахождения собственных значений задачи, приведен критерий наличия отрицательного собственного значения, исследована асимптотика отрицательного собственного значения, зависящего от параметра.

Ключевые слова: Краевая задача на собственные значения, нелокальные граничные условия, граничные условия Неймана, зависимость собственных значений от параметра, отрицательное собственное значение, асимптотика собственных значений.

ON A BOUNDARY-VALUE PROBLEM WITH EIGENVALUES AND GENERALIZED NONLOCAL BOUNDARY CONDITIONS OF THE NEUMANN TYPE ON AN INTERVAL

Pokrovski I.L.,

PhD, Associate Professor,

Bauman Moscow State Technical University (National Research University)

Moscow, Russia

Prozorovsky A.A.,

Senior lecturer,

Bauman Moscow State Technical University (National Research University)

Moscow, Russia

Abstract: In this paper, we consider a boundary value problem on a finite interval with non-local boundary conditions that generalize the Neumann boundary conditions, obtain an equation for finding the eigenvalues of the problem, provide a criterion for the presence of a negative eigenvalue, and investigate the asymptotics of a negative eigenvalue depending on a parameter.

Keywords: Eigenvalue boundary value problem, nonlocal boundary conditions, Neumann boundary conditions, dependence of eigenvalues on a parameter, negative eigenvalue, asymptotic behavior of eigenvalues.

Рассмотрим краевую задачу на собственные значения с нелокальными граничными условиями

$$\begin{cases} -y'' - \lambda y = 0, \ x \in (0,1), \\ -y'(0) \pm r^2\big(\alpha y(0) + \beta y(1)\big)\alpha = 0, \\ y'(1) \pm r^2\big(\alpha y(0) + \beta y(1)\big)\beta = 0, \end{cases} \qquad (1\pm)$$

где λ – спектральный параметр, $\psi = (\alpha, \beta)^T$ – «профиль» производной в направлении внешней нормали к границе слоя $0 < x < 1$, $\alpha, \beta \neq 0$, $r > 0$ – вещественный параметр, также учитывается случай $r = 0$ и предельный случай $r = \infty$. Задача (1) возникает из более общей краевой задачи на собственные значения с нелокальными граничными условиями [1]

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u = 0, \ \ x \in \Omega, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial \Omega} \pm r^2 \left(\displaystyle\int_{\partial \Omega} u \psi ds \right) \psi = 0, \end{cases}$$

в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Нетривиальная функция $\psi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ задаёт «профиль» производной $\frac{\partial \nu}{\partial \nu}$ в направлении внешней нормали к границе, $u \in H^2(\Omega)$, $u|_{\partial\Omega} \in H^{3/2}(\partial\Omega)$ и $\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ (H^α – обозначение для пространств С.Л. Соболева [2]).

Несложно проверить, что граничные условия задачи (1) обеспечивают оператору $-\frac{d^2}{dx^2}$ симметричность, что позволяет считать спектральный параметр λ вещественным и, в дальнейшем, применить теорему Гильберта-Шмидта [3].

Уравнение задачи (1) является линейным однородным второго порядка с постоянными коэффициентами и имеет фундаментальную систему решений:

$$\begin{cases} \{\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda}x, \operatorname{sh}\sqrt{-\lambda}x\} \ \text{при} \ \lambda < 0; \\ \{1, x\} \ \text{при} \ \lambda = 0; \\ \{\cos\sqrt{\lambda}x, \sin\sqrt{\lambda}x\} \ \text{при} \ \lambda > 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Все собственные значения задачи (1+) окажутся положительными, в чем можно убедиться как непосредственно, так и проводя априорную оценку для решений задачи (1+) с учётом граничных условий задачи: соотношения

$$0=\int_0^1(-y''-\lambda y)y dx=r^2\big(\alpha y(0)+\beta y(1)\big)^2+\int_0^1 y'^2 dx-\lambda\int_0^1 y^2 dx$$

могут выполняться только при $\lambda>0$ в случае $\alpha+\beta\neq0$ и $\lambda\geq0$ в случае $\alpha+\beta=0$.

Дальнейшее исследование задачи (1) предполагает подстановку общего решения $y(x)=Ay_1(x)+By_2(x)$, где $y_{1,2}(x)$ – «подходящий» комплект фундаментальной системы решений (2), в граничные условия задачи (1) [4]. Это приводит к линейной однородной системе относительно A и B, условие нетривиальной совместности которой превращается в уравнение, решениями которого являются собственные значения задачи (1):

$$\mp r^2(P\operatorname{ch}z+Q)=z\operatorname{sh}z,\ z=\sqrt{-\lambda}, z>0,\ \text{при}\ \lambda<0; \qquad (3\pm)$$

$$r^2(\alpha+\beta)^2=r^2(P+Q)=0,\ \text{при}\ \lambda=0; \qquad (4)$$

$$\pm r^2(P\cos t+Q)=t\sin t,\ t=\sqrt{\lambda},\ t>0\ \text{при}\ \lambda>0; \qquad (5\pm)$$

$$P\equiv\alpha^2+\beta^2, Q\equiv2\alpha\beta,\ \ 0<Q\leq P,$$

С помощью элементарных рассуждений несложно убедиться, что уравнение (3+) не имеет решений.

Перепишем уравнение (3−) в виде

$$z=r^2\frac{(P\operatorname{ch}z+Q)}{\operatorname{sh}z}. \qquad (6)$$

Левая часть уравнения (6) при $z>0$ представляет собой монотонно убывающую функцию, стремящуюся к $+\infty$ при $z\to0+$ и к Pr^2 при $z\to+\infty$, откуда следует, что решение $z>0$ существует при любом $r>0$ и имеет вид $z=r^2\big(P+\bar{o}(1)\big)$ при $z\to+\infty$. Доказано

Предложение 1. *Решение $z(r)$ уравнения (3−):*

1) *существует и единственно для любого $r > 0$;*
2) *имеет асимптотическое поведение $z(r) \sim Pr^2$ при $r \to +\infty$.*

Следствие 1 Предложения 1. *Полученная из уравнения (3−) асимптотика первого отрицательного собственного значения задачи (1−), имеет вид:*

$$\lambda_1(r) \sim -P^2 r^4 \text{ при } r \to +\infty.$$

Замечание 1. Приведенная в Следствии 1 Утверждения 1 асимптотика отрицательного собственного значения задачи (1), полученная непосредственно из уравнения (3−), оказывается существенно более сильной, нежели оценка асимптотики, приведённая в [К], полученной в общем случае из априорной оценки и имеющей вид $\lambda_1(r) \le f(r) \sim Cr^2$ при $r \to +\infty$.

На рис.1 приведена сводная графическая иллюстрация решений уравнений (3±), (4) и (5±), зависящих от параметра r при $\alpha + \beta \neq 0$. Именно, иллюстрации

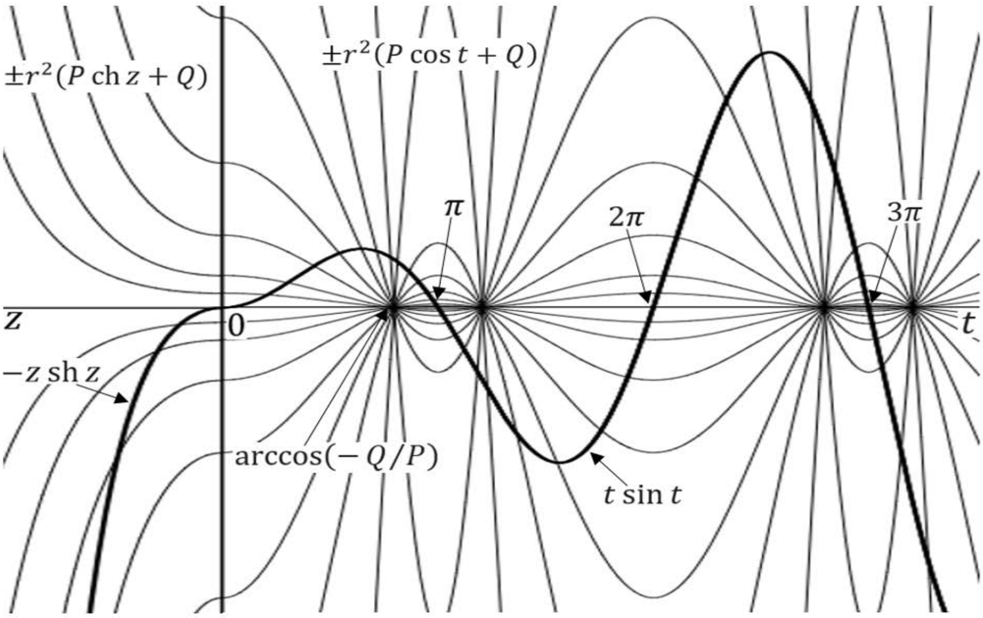

рис.1

для «гиперболических» (соответствующих отрицательным собственным значениям $\lambda < 0$, ось Oz) и «тригонометрических» (соответствующих положительным собственным значениям $\lambda > 0$, ось Ot) «сшиты» так, что подразумевают гладкое продолжение друг друга, что непосредственно показывает возникновение и исчезновение отрицательного собственного значения при прохождения параметра r через нуль. Также рис.1 позволяет наглядно показать характер монотонности собственных значений задачи ($1\pm$) в зависимости от параметра r.

Остановимся подробнее на рассмотрении оставшихся случаев.

1) Пусть $\alpha + \beta = 0$, тогда для задачи ($1\pm$)

$$\begin{cases} -y'' - \lambda y = 0, \qquad x \in (0,1), \\ -y'(0) \pm r^2\alpha^2\big(-y(0) + y(1)\big) = 0, \\ y'(1) \pm r^2\alpha^2\big(-y(0) + y(1)\big) = 0, \end{cases}$$

соотношения ($3\pm$), (4) и ($5\pm$) примут вид

$$\mp r^2 P(\operatorname{ch} z - 1) = z \operatorname{sh} z, \quad \text{при} \ \ \lambda < 0; \tag{7±}$$

$$r^2 \cdot 0 = 0, \quad \text{при} \ \ \lambda = 0; \tag{8}$$

$$\pm r^2 P(\cos t - 1) = t \sin t, \quad \text{при} \ \ \lambda > 0; \tag{9±}$$

$$P = 2\alpha^2 = -Q.$$

Из тривиального уравнения (8) следует, что $\lambda = 0$ есть собственное значение задачи ($1\pm$) при любом $r > 0$. То же самое можно сказать про значения $\lambda = (2\pi n)^2$, $n = 1,2,\dots$, (рис.2). Указанные собственные значения имеют кратность 2. ($7-$)

Уравнения (7+) и (9+) не имеют положительных решений, а уравнения ($7-$) и (9–) несложно свести к виду

$$\operatorname{th}\frac{z}{2} = \frac{z}{r^2 P} \qquad \text{и} \qquad \operatorname{tg}\frac{t}{2} = \frac{t}{r^2 P}\,, \tag{10}$$

соответственно. Несложно убедиться, что выполнение неравенства $r|\alpha| > 1$ является критерием наличия у каждого из уравнений (10) положительного решения.

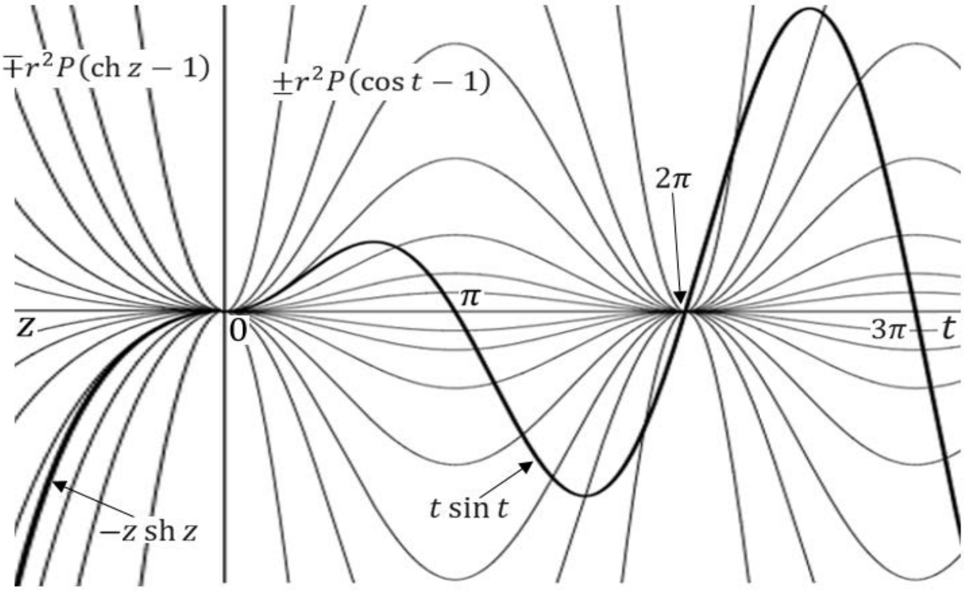

рис.2

2) Пусть $\alpha - \beta = 0$, тогда в задаче $(1\pm)$

$$\begin{cases} -y'' - \lambda y = 0, \qquad x \in (0,1), \\ -y'(0) \pm r^2\alpha^2\big(y(0) + y(1)\big) = 0, \\ \;y'(1) \pm r^2\alpha^2\big(y(0) + y(1)\big) = 0, \end{cases}$$

В качестве соотношений (3±), (4) и (5±) получим

$$\mp r^2 P(\operatorname{ch} z + 1) = z \operatorname{sh} z, \quad \text{при} \;\; \lambda < 0; \qquad (11\pm)$$

$$r^2(\alpha+\beta)^2 = 4r^2\alpha^2 = 0, \quad \text{при} \;\; \lambda = 0; \qquad (12)$$

$$\pm r^2 P(\cos t + 1) = t \sin t, \quad \text{при} \;\; \lambda > 0; \qquad (13\pm)$$

$$P = 2\alpha^2 = Q.$$

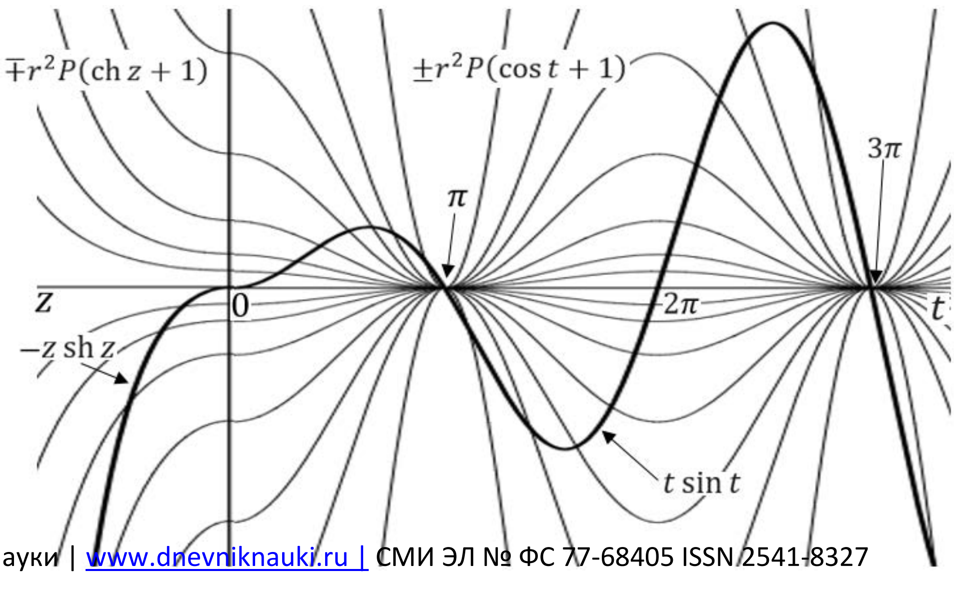

рис.3

Отметим, что в этом случае при любом $r > 0$ собственными значениями кратности 2 окажутся числа $\lambda = \left(\pi(2n-1)\right)^2$, $n = 1,2, \dots$, (рис.3). Графические иллюстрации решений уравнений (11$\pm$), (12) и (13$\pm$) приведены на рис.3.

Библиографический список

1. Покровский И.Л., О спектральной задаче для оператора Лапласа с нелокальными граничными условиями // Материалы Крымской Осенней Математической школа-симпозиума КРОМШ-2018, Симферополь, «Полипринт», 2018, с.74-76.
2. Агранович М.С., Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей. - М: Изд-во МЦНМО, 2013, 378с.
3. Шубин М.А., Лекции об уравнениях математической физики, МЦНМО, М., 2001, 2003, 303 с.
4. Буфетов А.И., Гончарук Н.Б., Ильяшенко Ю.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: Изд. МГУ, Механико-Математический ф-т, 2012, – 120с.