УДК 517.929.4

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА

Покровский И.Л.,

к.ф.-м.н., доцент,

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)

Москва, Россия

Аннотация: В настоящей работе предложен подход к исследованию на устойчивость решений систем дифференциальных уравнений первого порядка связанный с применением метода Ляпунова. Дано описание класса систем и указан алгоритм построения функции Ляпунова.

Ключевые слова: устойчивость по Ляпунову, асимптотическая устойчивость, метод Ляпунова, функция Ляпунова, условие типа сохранения знака, подчинённые члены системы.

On one case of constructing a Lyapunov function.

Pokrovski I.L.,

PhD, Associate Professor,

Bauman Moscow State Technical University (National Research University)

Moscow, Russia

Abstract: In this paper, an approach to studying the stability of solutions to systems of first-order differential equations using the Lyapunov method is proposed. A description

of a class of systems is given, and an algorithm for constructing a Lyapunov function is specified.

Keywords: Lyapunov stability, asymptotic stability, Lyapunov method, Lyapunov function, sign-preserving condition, subordinate system members.

Пусть автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, где $(f_1, \dots, f_n)^T$ – непрерывное векторное поле в ограниченной области, содержащей начало координат,

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n, \tag{1}$$

имеет тривиальное решение. Тогда точка $(0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^n_{\boldsymbol{x}}$ будет неподвижна под действием фазового потока, порождённого системой (1). Определим для нулевого решения устойчивость по Ляпунову и асимптотическую устойчивость.

Определение 1. *Нулевое (тривиальное) решение* $\widehat{\boldsymbol{x}}(t) = \left(x_1(t), \dots, x_n(t)\right)^T \equiv 0$ *системы* (1) *будем называть устойчивым по Ляпунову, если для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется* $\delta(\varepsilon)$, *такое что для решений* $\boldsymbol{x}(t)$ *из начального неравенства* $\|\boldsymbol{x}(t_0)\| < \delta(\varepsilon)$ *следует* $\|\boldsymbol{x}(t)\| < \varepsilon$ *при всех* $t > t_0$.

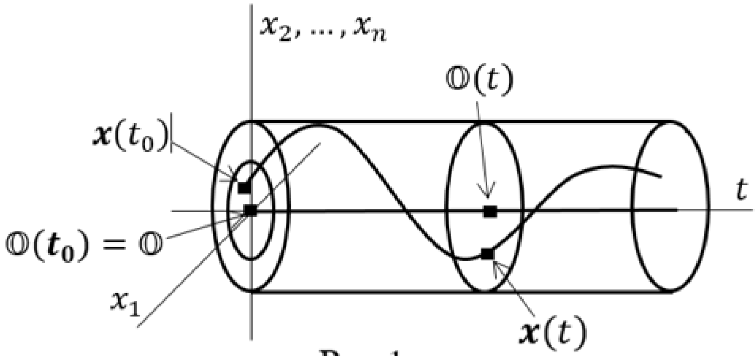

Рис.1

Исследуемое на устойчивость нулевое решение $\mathbb{O}(t)$ системы (1) называется *невозмущённым*, система (1) – системой *уравнений возмущённого движения*, неизвестная функция $\boldsymbol{x}(t)$ – *возмущённым решением* (рис.1).

Определение 2. *Нулевое решение* $\widehat{\boldsymbol{x}}(t) \equiv 0$ *системы* (1) *называется асимптотически устойчивым, если оно:*

1) *устойчиво по Ляпунову;*
2) *для решений* $\boldsymbol{x}(t)$, *достаточно близких к* $\widehat{\boldsymbol{x}}(t)$ *в начальнойточке* t_0, *справедлив предельный переход* $\lim\limits_{t\to+\infty} \|\boldsymbol{x}(t)\| = 0$.

В основе *(второго) метода Ляпунова* [1,3] исследования на устойчивость тривиального решения системы (1) лежит специальное построение скалярной функции – *функции Ляпунова* – на фазовом пространстве и исследование свойств этой функции. Будем называть *положительно определённой* неотрицательную функцию, обращающаяся в нуль в единственной точке – начале координат.

Определение 3. *Функцией Ляпунова системы* (1) *называется непрерывно дифференцируемая положительно определённая функция* $V(\boldsymbol{x})$, *имеющая неположительную производную в силу системы,*

$$\frac{dV\big(\boldsymbol{x}(t)\big)}{dt} \leq 0\,. \tag{2}$$

Неравенство (2) содержит производную «в силу системы» сложной функции $V\big(\boldsymbol{x}(t)\big)$,

$$\frac{dV\big(\boldsymbol{x}(t)\big)}{dt} \equiv \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_j} f_i,$$

вдоль фазовых траекторий системы (1), параметризованных независимой переменной t.

Теорема 1 (А.М. Ляпунов, об устойчивости). *Пусть, для некоторого* $\varepsilon > 0$, *в полубесконечной «трубчатой» окрестности* $t \geq t_0$, $|x_i| < \varepsilon, i = 1, \dots, n$,*(т.е.* $\|\boldsymbol{x}\|_\infty < \varepsilon$) *нулевого решения системы* (1) *выполнены условия:*

1) *функции* $f_i(t, x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, n$, *определены и непрерывны в ограниченной области, содержащей начало координат;*

2) $f_i(0, \dots, 0) = 0, i = 1, \dots, n;$

3) существует функция Ляпунова системы (1).

Тогда нулевое решение $\boldsymbol{x}(t) \equiv 0$ *системы (1) устойчиво по Ляпунову.*

Усиленным вариантом Теоремы 1 при дополнительных предположениях является

Теорема 2. (А.М. Ляпунов, об асимптотической устойчивости)**.** *Пусть выполнены условия 1) и 2) Теоремы 1 и, кроме того, производная в силу системы* (1) *функции Ляпунова удовлетворяет условию*

$$\frac{dV(\boldsymbol{x}(t))}{dt} \leq -W(\boldsymbol{x}) \leq 0 \tag{3}$$

для некоторой непрерывной положительно определённой функции $W(\boldsymbol{x})$*, равной нулю лишь в начале координат. Тогда нулевое решение* $\boldsymbol{x}(t) \equiv 0$ *системы* (1) *асимптотически устойчиво.*

Заметим, что условие (3) является более сильным, нежели (2).

Не существует общего правила построения функции Ляпунова, ввиду необходимости учёта специфики вида системы (1) [2]. В представленном ниже специальном случае алгоритм построения функции Ляпунова предоставляет

Предложение 1. *Пусть для непрерывных функций* $p(x)$, $q(y)$, $f(x,y)$, $g(x,y)$ *в некоторой окрестности начала координат выполнены условия типа сохранения знака*

$$sp(s) > 0, \quad sq(s) > 0, \quad sf(s,y) > 0, \quad sg(x,s) > 0, \quad s \neq 0.$$

Тогда нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -q(y) - f(x,y), \\ \dot{y} = p(x) - g(x,y), \end{cases} \tag{4}$$

асимптотически устойчиво.

Условия Предложения 1 допускает геометрическую интерпретацию в виде принадлежности графиков функций $p(s)$, $q(s)$, $f(s,y)$ и $g(x,s)$ I-й и III-й четвертям координатной плоскости с абсциссой s.

Доказательство. Из условия Предложения 1 следует, что система (4) обладает нулевым решением. Будем искать функцию Ляпунова в виде

$$V(x,y) = P(x) + Q(y),$$

полагая $P(x)$ и $Q(y)$ непрерывно дифференцируемыми функциями, тогда

$$\frac{dV}{dt} = P'(x)\big(-q(y) - f(x,y)\big) + Q'(y)\big(p(x) - g(x,y)\big) = \tag{5}$$

$$= \big(-P'(x)\, q(y) + Q'(y)\, p(x)\big) - \Big(P'^{(x)} f(x,y) + Q'^{(y)} g(x,y)\Big).$$

Приравнивая к нулю первое слагаемое в окончательном выражении (5),

$$-P'(x)\, q(y) + Q'(y)\, p(x) = 0,$$

разделяем переменные x и y,

$$\frac{P'(x)}{p(x)} = \frac{Q'(y)}{q(y)} = \text{const}, \quad x, y \neq 0,$$

после чего положим

$$V(x,y) \equiv \int_0^x p(\xi)\, d\xi + \int_0^y q(\eta)\, d\eta. \tag{6}$$

Несложно убедиться в том, что выражение (6) задаёт функцию Ляпунова – непрерывно дифференцируемую положительно определённую функцию с отрицательно определённой в условиях Предложения 1 производной в силу системы,

$$\frac{dV}{dt} = -\big(p(x) f(x,y) + q(y) g(x,y)\big) < 0, \quad x^2 + y^2 \neq 0. \tag{7}$$

По Теореме 2 нулевое решение системы (4) асимптотически устойчиво. Предложение 1 доказано.

Заметим, что для малых $\sigma > 0$ фазовые траектории системы (4), начинающиеся на границе окрестности нуля (корректно заданной в силу определения функции $V(x,y)$),

$$\{(x,y) : V(x,y) < \sigma\},$$

в дальнейшем, в силу неравенства (7), не выйдут за пределы $\varepsilon(\sigma)$–окрестности нуля, где

$$\varepsilon(\sigma) = \max_{V(x,y)<\sigma} \|(x,y)\|,$$

при этом

$$\{(x,y) : V(x,y) < \sigma\} \subset \{(x,y) : \|(x,y)\| < \varepsilon(\sigma)\}.$$

Также заметим, что Предложение 1 останется справедливым при одновременной смене знаков перед слагаемыми $p(x)$ и $q(y)$, т.е. в случае системы вида

$$\begin{cases} \dot{x} = \qquad\qquad q(y) - f(x,y), \\ \dot{y} = -p(x) \qquad\quad - g(x,y). \end{cases}$$

Пример 1. Функция Ляпунова (6) системы вида (4)

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y\mathrm{e}^{-y^2} - x\,\mathrm{tg}\,(xy)^4, \\ \dot{y} = -2x\ln(1+x^2) - y^3\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,, \end{cases}$$

удовлетворяющей условиям Предложения 1, равна

$$V(x,y) \equiv \int_0^x 2x\ln(1+x^2)\,dx + \int_0^y 2y\mathrm{e}^{-y^2}dy =$$

$$= (1+x^2)\ln(1+x^2) - x^2 + 1 - \mathrm{e}^{-y^2}.$$

Её производная в силу системы отрицательно определена,

$$\frac{dV}{dt} = 2x\ln(1+x^2)\big(2y\mathrm{e}^{-y^2} - x\,\mathrm{tg}\,(xy)^4\big) +$$

$$+ 2y\mathrm{e}^{-y^2}\left(-2x\ln(1+x^2) - y^3\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\right) =$$

$$= -2x^2 \ln(1+x^2)\,\mathrm{tg}(xy)^4 - 2y^4\,\mathrm{e}^{-y^2}\sqrt{1+4(x^2+y^2)} < 0,\ \ x^2+y^2 \neq 0,$$

откуда следует асимптотическая устойчивость нулевого решения системы.

Пример 2. Рассмотрим частный случай системы (4)

$$\begin{cases} \dot{x} = \quad\ -by - f(x,y), \\ \dot{y} = ax \qquad - g(x,y), \ \ a,b \in \mathbb{R},\ \ a,b > 0, \end{cases} \tag{8}$$

с функциями $f(x,y)$ и $g(x,y)$, удовлетворяющими условиям Предложения 1, дифференцируемыми в нуле и такими что

$$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0, \quad g_x(0,0) = g_y(0,0) = 0,$$

т.е. $f(x,y)$ и $g(x,y)$ являются *подчинёнными в нуле членами* системы (8),

$$f(s,y), g(x,s) = \bar{o}(s) \ \text{ при } \ s \to 0.$$

Заметим, что требование дифференцируемости в нуле функций $f(x,y)$ и $g(x,y)$ требуется для линеаризации системы (8) в нуле и является излишним с точки зрения применения Предложения 1. Матрица линеаризованной системы

$$\begin{cases} \dot{u} = \quad\ -bv, \\ \dot{v} = au \qquad, \end{cases}$$

имеет пару мнимых собственных значений $\pm i\sqrt{ab}$. Нулевое решения здесь устойчиво по Ляпунову, но не является асимптотически устойчивым. При возвращении к исходной системе (8) характер устойчивости может разрешиться как в ту, так и в другую сторону, в зависимости от поведения подчинённых в нуле членов $f(x,y)$ и $g(x,y)$. Применение же Предложения 1 к функции Ляпунова вида (6)

$$V(x,y) = \frac{ax^2+by^2}{2}, \ \ \frac{dV}{dt} = -\big(axf(x,y) + byg(x,y)\big) < 0 \text{ при } x^2+y^2 \neq 0,$$

позволяет говорить об асимптотической устойчивости нулевого решения.

Библиографический список:

1. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. - М.: Издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1998. – 471с.

2. Куракин Л.Г., Островская И.В., Элементы теории устойчивости. - Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2016. — 60 с.

3. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. - М.: Государственное Издательство Технико-Технической Литературы, 1950. – 464с.