

УДК 517.929.4

О КОНТРПРИМЕРЕ, СВЯЗАННОМ С ПОНЯТИЕМ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Покровский И.Л.,

к.ф.-м.н., доцент,

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

(национальный исследовательский университет)

Москва, Россия

Аннотация: В настоящей работе рассматривается внутренняя связь между элементами определения асимптотической устойчивости решения системы дифференциальных уравнений первого порядка. Построен контрпример в вещественном одномерном случае.

Ключевые слова: устойчивость по Ляпунову, асимптотическая устойчивость, фазовое пространство, интегральные траектории, неустойчивость.

A COUNTEREXAMPLE RELATED TO THE CONCEPT OF ASYMPTOTIC STABILITY

Pokrovski I.L.,

PhD, Associate Professor,

Bauman Moscow State Technical University (National Research University)

Moscow, Russia

Abstract: This paper examines the internal relationship between the elements of determining the asymptotic stability of a solution to a system of first-order differential equations. A counterexample is constructed in the real one-dimensional case.

Keywords: Lyapunov stability, asymptotic stability, phase space, integral trajectories, instability.

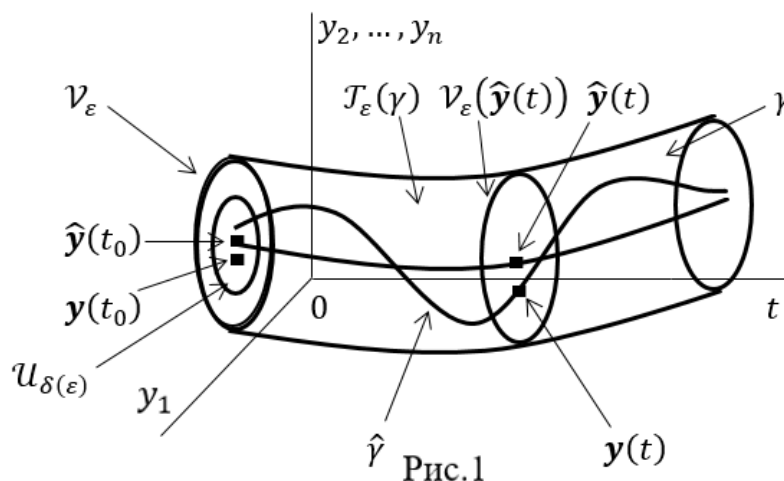
В основе теории устойчивости лежат понятия устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости [2-4]. Рассмотрим систему обыкновенных уравнений первого порядка

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, \dots, y_n), \quad i = 1, \dots, n; \quad t \geq t_0, \quad (1)$$

где t – независимая переменная, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$ – неизвестная вектор-функция, $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)^T$ – непрерывное векторное поле в трубчатой окрестности интегральной траектории решения $\hat{\mathbf{y}}(t)$ системы (1).

Пусть $\mathbf{y}(t)$ – решение (1) и γ – интегральная траектория решения $\mathbf{y}(t)$, а $\mathcal{T}_\varepsilon(\gamma)$ – «трубчатая» ε -окрестность интегральной траектории γ в $\mathbb{R}_{t, \mathbf{y}}^{n+1}$, т.е. множество точек $\mathbb{R}_{t, \mathbf{y}}^{n+1}$, $t \geq t_0$, отклоняющихся от точек интегральной кривой γ по норме переменной \mathbf{y} менее, чем на ε (Рис. 1).

Определение 1. Решение $\hat{\mathbf{y}}(t)$ системы (1.1) будем называть устойчивым по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon)$, такое что для решения $\mathbf{y}(t)$ из неравенства $\|\mathbf{y}(t_0) - \hat{\mathbf{y}}(t_0)\| < \delta(\varepsilon)$ при $t = t_0$ вытекает неравенство $\|\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)\| < \varepsilon$ при всех $t > t_0$.



Геометрический смысл Определения 1 заключается в том, что решения, $\delta(\varepsilon)$ -близкие в начальный момент $t = t_0$ к решению $\hat{y}(t_0)$ по норме в \mathbb{R}^n , обязаны оставаться ε -близкими на всем луче $t > t_0$. При этом соответствующие интегральные траектории этих решений должны находиться в трубчатой окрестности $\mathcal{T}_\varepsilon(\hat{y})$. При этом автоматически выполняется неравенство $\varepsilon \geq \delta(\varepsilon)$.

Определение 2. Решение $\hat{y}(t)$, не являющееся устойчивым по Ляпунову, называется неустойчивым.

Из Определений 1 и 2 сразу следует достаточное условие неустойчивости.

Утверждение 1. Для неустойчивости решения $\hat{y}(t)$ достаточно существования значения ε , такого что для начального условия $y(t_0)$, сколь угодно близкого к $\hat{y}(t_0)$, можно указать значение t , при котором выполняется неравенство $\|y(t) - \hat{y}(t)\| \geq \varepsilon$.

Подробнее, это означает, что, т.е. решения $y(t)$ в точке t выйдет за пределы окрестности $\mathcal{V}_\varepsilon(y(t))$ и в этом месте, соответственно, интегральная траектория выйдет за пределы трубчатой окрестности \mathcal{T}_ε .

Усиливая требования к Определению 1, получим

Определение 3. Решение $\hat{y}(t)$ системы (1) называется **асимптотически устойчивым**, если оно:

- 1) устойчиво по Ляпунову;
- 2) для решений $y(t)$, достаточно близких к $\hat{y}(t)$ в точке t_0 , выполнено «асимптотическое условие»

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|y(t) - \hat{y}(t)\| = 0.$$

Заметим, что требования условия 1) устойчивости по Ляпунову Определения 2 не является избыточным, т.е. не вытекает из условия 2), в котором речь идет лишь о предельном переходе. Условие же 1) предполагает близость решения $y(t)$ к $\hat{y}(t)$ при всех $t > t_0$. Известен пример [1] двумерной вещественной системы первого порядка, являющейся эквивалентом

комплексной задачи Коши для уравнения первого порядка, показывающий независимость требований 1) и 2) Определения 3.

Контрпример 1. Исследуем на устойчивость нулевое решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с вещественной независимой переменной и комплекснозначной неизвестной функцией

$$\begin{cases} z' = z^2, \\ z(t_0) = z_0, \end{cases} \quad (2)$$

причём $z_0 \in \mathbb{C}$ выбирается так, что либо $z_0 = 0$, либо $\operatorname{Re} z_0 \neq 0$. «Растаскивание», с учётом $z(t) = x(t) + iy(t)$, нелинейного уравнения задачи (2) на действительную и мнимую составляющие, приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y^2, \\ \dot{y} = 2xy. \end{cases} \quad (3)$$

Переходя от системы (3) к однородному уравнению

$$2xydx - (x^2 - y^2)dy = 0,$$

чь интегральные траектории (совпадающие с фазовыми кривыми системы (3) и соответствующие фазовым кривым уравнения задачи (2)) лежат на плоскости $\mathbb{R}_{x,y}^2$ на окружностях однопараметрического семейства

$$x^2 + \left(y - \frac{C}{2}\right)^2 = \frac{C^2}{4}, \quad C > 0, \quad (4)$$

касающихся оси абсцисс в начале координат (Рис.2).

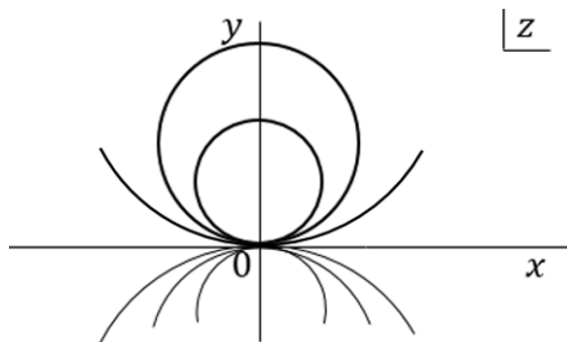


Рис.2

Легко видеть, что в сколь угодно малой окрестности нуля проходят фазовые кривые системы (3), которые затем, для достаточно больших t , отходят от начала координат на заведомо большие расстояния, но, в итоге, устремляются к нулю при $t \rightarrow +\infty$. Точка, движущаяся по фазовой решению с начальными данными $z_0 = x_0 + iy_0$, $y_0 \neq 0$, достигнет максимального удаления от начала координат на величину диаметра окружности (4)

$$d(x_0, y_0) = \frac{x_0^2 + y_0^2}{y_0},$$

которую можно найти как непосредственно геометрически, так и из уравнения (4), и которая может принимать произвольно большие значения при сколь угодно малых (x_0, y_0) : если положить $x_0 = ky_0$ и $y_0 \neq 0$, то справедлив предельный переход

$$d(ky_0, y_0) = y_0(k^2 + 1) \rightarrow +\infty, \quad k \rightarrow \infty.$$

Это показывает (см. Определение 2 и Утверждение 1), что нулевое решение задачи (2) (или системы (3)) не будет устойчивым по Ляпунову, при выполненном асимптотическом условии 2) Определения 3.

Рассмотрим на эту тему ещё один

Контрпример 2. Кривые семейства

$$\begin{cases} x = \pm e^{-c(t-1)^2 + \frac{1}{c}}, & t \geq 0, & c > 0, \\ x = 0, & t \geq 0, \end{cases} \quad (5)$$

схематично изображенные на Рис.3 являются интегральными траекториями

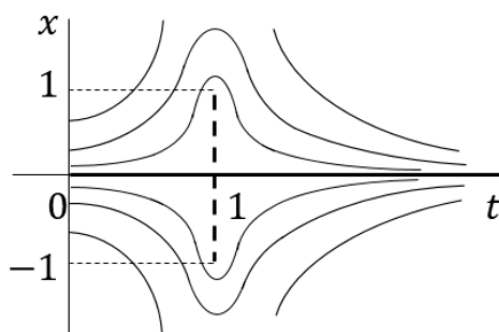


Рис.3

дифференциального уравнения первого порядка, которое можно получить, дифференцируя заданную в (5) функцию $x(t)$ и исключая C из системы

$$\begin{cases} x = \pm e^{-C(t-1)^2 + \frac{1}{C}}, \\ \dot{x} = \mp 2C(t-1)e^{-C(t-1)^2 + \frac{1}{C}}. \end{cases}$$

Первое уравнение этой системы сводится к квадратному уравнению Р

$$(t-1)^2 C^2 + C \ln|x| - 1 = 0,$$

положительное решение которого

$$C_+ = -\frac{\ln|x|}{2(t-1)^2} + \sqrt{\frac{\ln^2|x|}{4(t-1)^4} + 1} > 0$$

позволяет составить искомое дифференциальное уравнение вида $\dot{x} = f(t, x)$, где функция $f(t, x) : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ задана на своей области определения $D(f)$, представляющей собой правую полуплоскость $t \geq 0$, из которой удалены два полуоткрытых вертикальных отрезка $\{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t = 1, 0 < |x| \leq 1\}$,

$$D(f) \equiv \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t \geq 0\} \setminus \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t = 1, x^2(|x| - 1) \geq 0\},$$

следующим образом:

$$f(t, x) \equiv \begin{cases} \left(\frac{\ln|x| - \sqrt{\ln^2|x| + 4(t-1)^2}}{t-1} \right) x, & t \neq 1, x > 0, \\ -\left(\frac{\ln|x| - \sqrt{\ln^2|x| + 4(t-1)^2}}{t-1} \right) x, & t \neq 1, x < 0, \\ 0, & t \geq 0, x = 0, \\ 0, & t = 1, |x| > 1. \end{cases} \quad (6)$$

Среди решений (6) уравнения (5) содержится нулевое решение. Полагая в Утверждении 1 $\varepsilon = 1$, приходим к неустойчивости нулевого решения, удовлетворяющего асимптотическому условию 2) Определения 3, но не являющегося устойчивым по Ляпунову.

Библиографический список:

1. Буфетов А.И., Гончарук Н.Б., Ильяшенко Ю.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: Изд. МГУ, Механико-Математический ф-т, 2012, – 120с.
2. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. - М.: Издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1998, – 471с.
3. Куракин Л.Г., Островская И.В., Элементы теории устойчивости. - Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2016. — 60 с.
4. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. – М.: Государственное Издательство Техничко-Технической Литературы, 1950, – 464с.