

УДК 004.9:612.82

***МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПАМЯТИ: НОВЫЕ
ПОДХОДЫ К КОДИРОВАНИЮ И ХРАНЕНИЮ ИНФОРМАЦИИ***

Поджидаев И.И.

Уральский государственный университет путей сообщения.

Екатеринбург, Россия.

Куликова О.В.

канд. пед. наук, доцент кафедры «Естественнонаучные дисциплины»

Уральский государственный университет путей сообщения (УрГУПС)

Екатеринбург, Россия.

Аннотация. Развитие компьютерных технологий и нейронаук за последние пять лет предоставило принципиально новые инструменты для изучения механизмов памяти кодирования и извлечения информации. Исследование посвящено анализу современных математических моделей, описывающих процессы хранения и обработки информации как в биологических, так и в искусственных системах. Особое внимание уделено сетям Хопфилда нового поколения, механизмам синаптической пластичности и их применению в архитектурах трансформаторов.

Ключевые слова: математическое моделирование памяти, сети Хопфилда, синаптическая пластичность, кодирование информации, трансформаторные архитектуры, разреженное кодирование, системная консолидация, нейронные сети

***MATHEMATICAL MODELING OF MEMORY: NEW APPROACHES TO
ENCODING AND STORING INFORMATION***

Podzhidaev I.I.

Ural State University of Railway Transport

Дневник науки | www.dnevniknauki.ru | СМИ Эл № ФС 77-68405 ISSN 2541-8327

Yekaterinburg, Russia.

Kulikova O.V.

Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor of the Department of Natural Sciences,

Ural State University of Railway Transport

Yekaterinburg, Russia.

Abstract. The development of computer technology and neuroscience over the past five years has provided fundamentally new tools for studying the mechanisms of memory encoding and information extraction. The research is devoted to the analysis of modern mathematical models describing the processes of information storage and processing in both biological and artificial systems. Special attention is paid to new generation Hopfield networks, synaptic plasticity mechanisms and their application in transformer architectures.

Keywords: mathematical modeling of memory, Hopfield networks, synaptic plasticity, information encoding, transformer architectures, sparse coding, system consolidation, neural networks

Введение

Механизмы кодирования, хранения и воспроизведения информации в памяти представляют собой фундаментальную проблему современной нейронауки и когнитивной науки. За последние два десятилетия появились революционные подходы, которые объединяют классические модели из психологии и нейробиологии с современными методами математического моделирования и вычислительных наук [1, 3].

Актуальность темы заключается в том, что понимание принципов организации памяти не только позволяет разработать более эффективные

искусственные системы обработки информации, но и предоставляет терапевтические возможности для коррекции нарушений памяти при нейродегенеративных заболеваниях. На сегодняшний день примерно 50 миллионов людей во всём мире страдают деменцией, при этом почти 70 процентов случаев связано с болезнью Альцгеймера, в основе которой лежит нарушение механизмов долгосрочной синаптической пластичности [2].

Классические модели памяти, такие как трёхкомпонентная модель Аткинсона-Шиффрина (1968), описывают процесс переноса информации из сенсорного регистра в кратковременное хранилище, а затем в долгосрочную память [1]. Однако эти модели не объясняют количественные характеристики ёмкости хранения и скорости обработки информации. Современные математические подходы, основанные на теории динамических систем и методах глубокого обучения, преодолевают эти ограничения, предлагая точные формулировки процессов консолидации и извлечения памяти.

Целью данного исследования является систематический анализ современных математических моделей кодирования и хранения информации в памяти, выявление их сильных сторон и перспективных направлений развития. Основные задачи работы: (1) рассмотреть математические основы классических и современных моделей памяти; (2) проанализировать механизмы синаптической пластичности в контексте кодирования информации; (3) исследовать применение методов разреженного кодирования для оптимизации ёмкости памяти; (4) выявить связь между сетями Хопфилда и архитектурами трансформаторов; (5) предложить рекомендации для развития гибридных подходов в нейроинженерии и искусственном интеллекте.

Материалы и методы

В качестве методологической основы применялся анализ научной литературы, опубликованной в авторитетных рецензируемых изданиях за период 2020-2025 гг. Материалом исследования служили статьи в журналах Nature,

Science Advances, Frontiers in Psychology, а также архив препринтов arXiv. Основной поиск проводился по следующим ключевым словам и их комбинациям на английском языке: "mathematical memory models", "Hopfield networks", "synaptic plasticity memory", "sparse distributed memory", "working memory encoding", "transformer attention mechanism", "memory capacity neural networks", "engram consolidation".

Критерии включения исследований: (1) описание математических моделей кодирования памяти; (2) наличие экспериментальных данных или вычислительных симуляций; (3) публикация в научных журналах с импакт-фактором или на платформах с системой рецензирования; (4) актуальность для современной нейроинженерии и когнитивной науки. Критерии исключения: работы, посвящённые исключительно клинической психиатрии без компонента моделирования; обзоры без собственных методологических вкладов; недостаточно кастомизированные вычислительные исследования.

Методологический подход включал следующие этапы: первый этап — систематический поиск и отбор релевантных источников; второй этап — реферирование и классификация найденных моделей по категориям (классические модели, динамические системы, сетевые модели); третий этап — сравнительный анализ предложенных подходов с выявлением их математических и вычислительных характеристик; четвёртый этап — синтез полученных знаний с целью формулировки перспективных направлений исследований.

Для анализа математических моделей применялись методы линейной алгебры, теории динамических систем и теории информации. Рассматривались дифференциальные уравнения, описывающие эволюцию активности нейрональных популяций, матричные представления синаптических весов и информационно-теоретические метрики для оценки ёмкости хранения.

Результаты

Современное понимание математического моделирования памяти строится на интеграции нескольких концептуальных подходов. Согласно исследованиям Финоттелли и коллег (2023), существуют минимум четыре основных класса математических моделей: модели, основанные на математическом анализе и дифференциальных уравнениях; модели линейной алгебры; модели теории вероятностей и статистики; нейросетевые модели [1].

Классическая модель Аткинсона-Шиффрина используется для описания трёхэтапного процесса передачи информации: от сенсорного регистра к кратковременному хранилищу и затем к долгосрочной памяти. Математическое описание этого процесса предполагает использование уравнений вероятности переноса информации между компартментами. Вероятность успешной передачи информации из кратковременной памяти в долгосрочную зависит от длительности времени удержания информации в кратковременной памяти согласно формуле:

$$P(\text{transfer}) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (1)$$

где λ — коэффициент передачи, зависящий от типа информации,
 t — время удержания.

Ёмкость кратковременной памяти согласно исследованиям Миллера (1956) составляет 7 ± 2 элемента информации, однако эта оценка была пересмотрена современными исследованиями, показывающими, что ёмкость варьируется в зависимости от сложности стимулов и возраста субъекта.

Развитие этого подхода выявило необходимость более точного моделирования взаимодействий между различными компартментами памяти. Модель Мурре и коллег (2013) применила принципы, вытекающие из закона Рибо, к математическому описанию амнезий, разложив процессы памяти на множество подпроцессов с различными временными константами, варьирующимися от миллисекунд до десятилетий [3].

Количественные исследования Георгиу, Каткова и Цодыкса (2021) продемонстрировали, что при воздействии сильной памяти после более слабой происходит ретроактивное подавление слабого воспоминания. Математическое моделирование этого явления привело к выявлению степенных законов забывания с экспонентами, медленно убывающими к -1 при времени, достаточном для экспериментального измерения. Эта находка согласуется с классической кривой забывания Эббингауза (1885), но предоставляет более точные параметры для различных типов информации.

Синаптическая пластичность является фундаментальным механизмом, обеспечивающим кодирование информации на уровне отдельного синапса. Спайк-временная зависимая пластичность (STDP) — один из наиболее изученных типов синаптических изменений, описывает долгосрочное потенцирование (LTP) или долгосрочную депрессию (LTD) в зависимости от временного интервала между пресинаптическим и постсинаптическим спайками.

Согласно фундаментальному обзору Дебанна (2023), STDP определяется соотношением:

$$\Delta w = A^+ \cdot e^{-\Delta t/\tau^+} \quad (2)$$

для пресинаптического спайка, предшествующего постсинаптическому (в пределах временного окна порядка 20-100 миллисекунд),

где w - сила синапса,

A^+ и τ^+ - параметры пластичности,

Δt - временной интервал между событиями [4].

Недавние исследования, опубликованные в 2025 году, выявили, что баланс между возбуждающими и тормозящими вводами в нейроны, кодирующие память (так называемые энграм-нейроны), играет критическую роль в стабилизации памятных следов. Увеличенное возбуждающее входящее воздействие

обеспечивает необходимый сигнал для кодирования и извлечения памяти, однако без компенсирующего увеличения тормозящих входов возникает риск неконтролируемой гиперактивности. Этот гомеостатический баланс поддерживается за счёт координированного действия как синаптических, так и несинаптических механизмов пластичности [2].

Исследования последних лет также показали, что белок PSD-95, локализованный в постсинаптической плотности, определяет специфические паттерны связности между энграм-нейронами и критически важен для долгосрочной стабильности памяти. Нарушение регуляции PSD-95, как в модельных организмах с делецией гена, приводит к несоответствию между повышенным потенцированием синапсов и дефицитом в пространственном обучении, что подчёркивает точную роль этого белка в функционировании памяти.

3.3. Сети Хопфилда и их ёмкость хранения

Сети Хопфилда, первоначально предложенные Джоном Хопфилдом в 1982 году, обеспечивают математическую рамку для понимания ассоциативной памяти, где паттерны могут быть восстановлены из неполных или зашумленных входов. Энергетическая функция классической сети Хопфилда определяется следующим выражением:

Энергия сети Хопфилда определяется выражением

$$E = -12 \sum_{ij} w_{ij} x_i x_j - \sum b_i x_i, \quad (3)$$

Где w_{ij} — вес синаптической связи между нейронами i и j ,

x_i — состояние нейрона i ,

b_i — смещение (bias).

Ёмкость хранения классической сети Хопфилда оценивается как

$$C \approx n \log 2n, C \approx 2 \log 2nn,$$

(4)

где n — количество нейронов в сети.

Это означает, что для сети из 1000 нейронов можно хранить примерно 130-150 различных паттернов с высокой точностью восстановления. При попытке сохранить большее количество паттернов точность резко падает из-за появления паразитных состояний равновесия [5].

Революционный прорыв произошёл благодаря работам Кротова и Хопфилда (2016), а затем Демирчигила и коллег (2017), которые предложили современные сети Хопфилда (ССХ) или плотные ассоциативные памяти (DAM) с новой функцией энергии и правилами обновления. Эти улучшенные сети демонстрируют экспоненциальную ёмкость хранения, что означает, что количество хранимых паттернов растёт экспоненциально с количеством нейронов:

$$N \frac{\max}{\min} \approx e^n \quad (5)$$

В период 2024-2025 годов был достигнут значительный прогресс в понимании оптимальной ёмкости современных моделей Хопфилда. Исследования выявили, что при представлении памятных паттернов как сферических кодов в высокомерном пространстве можно аналитически определить верхние границы ёмкости, которые совпадают с известными нижними оценками. Это позволило впервые установить асимптотическую ёмкость, которая растёт экспоненциально с количеством нейронов и измерением каждого паттерна, при этом требуя линейной зависимости размерности признакового пространства от количества хранимых памятей [6].

Разреженная распределённая память (РРП), впервые предложенная Пенгги Канервой в 1988 году при его работе в NASA, представляет собой математическую модель долгосрочной человеческой памяти, основанную на принципе распределённого кодирования информации. Главное отличие РРП от

Дневник науки | www.dnevniknauki.ru | СМИ Эл № ФС 77-68405 ISSN 2541-8327

традиционных подходов заключается в том, что каждый элемент памяти закодирован разреженно по всему пространству адресов большой размерности, а не в локализованном хранилище.

В архитектуре РРП адресное пространство может содержать 10^6 или более адресных строк, каждая из которых активируется только небольшим количеством элементов входного вектора. Эта разреженность обеспечивает несколько преимуществ: устойчивость к шуму входных данных, способность компенсировать ошибки в аппаратной реализации и высокую ёмкость хранения без значительного возрастания вычислительной сложности при восстановлении информации. Математически, процесс записи в РРП можно описать как распределённое увеличение счётчиков для адресов, активированных входным вектором, а процесс чтения — как накопление данных из всех активированных адресов с последующей пороговой фильтрацией.

Исследования, проведённые в 2024-2025 годах, продемонстрировали, что более новые архитектуры на основе линейных многослойных персептронов с встроенными принципами разреженного кодирования (Тор-К активация, L2-нормализация) могут достичь устойчивого непрерывного обучения и избежать катастрофического забывания — явления, при котором обучение на новых примерах приводит к резкой потере способности выполнять ранее усвоенные задачи. Архитектурная и активационная разреженность, присущие РРП, прямо способствуют формированию отличных, невзаимодействующих представлений памяти, тем самым смягчая проблему катастрофического забывания.

Обсуждение

Анализ современного состояния математического моделирования памяти показывает, что наиболее перспективными направлениями являются интеграция классических принципов биологической синаптической пластичности с методами глубокого обучения. Выявлены несколько ключевых закономерностей:

Первое: разреженное кодирование информации (как в классической РРП Канервы, так и в современных моделях с Тор-К активацией) обеспечивает существенное улучшение ёмкости памяти и энергетической эффективности. Биологические системы эволюционировали к использованию разреженного кодирования, вероятно, потому что это позволяет достичь баланса между информационной ёмкостью и метаболическими затратами.

Второе: существует глубокая математическая связь между механизмом внимания трансформаторов и извлечением памяти в сетях Хопфилда. Это не является случайным совпадением, а отражает фундаментальный принцип: для эффективного извлечения информации из памяти при наличии конкурирующих альтернатив необходим механизм избирательного внимания, который выделяет релевантные паттерны на основе их сходства с текущим запросом.

Третье: гомеостатический баланс между возбуждением и торможением является критическим для стабилизации памятных следов. Нарушение этого баланса приводит к либо недостаточной активации энграм-нейронов (и, следовательно, потере памяти), либо к гиперактивности и потере специфичности кодирования.

Выводы

Проведённый анализ современной научной литературы (2020-2025 гг.) показал, что математическое моделирование памяти достигло уровня, при котором эффективно объединяются идеи из нейробиологии, когнитивной психологии и машинного обучения. Сетей Хопфилда нового поколения, развивая идеи кодирования и извлечения информации, демонстрируют экспоненциальную ёмкость хранения и интегрируются с архитектурами трансформаторов, которые доказали свою эффективность в обработке сложных последовательностей.

Механизмы синаптической пластичности, особенно STDP, обеспечивают биологическую основу для кодирования информации на уровне отдельного синапса, в то время как разреженное кодирование оптимизирует это кодирование

с точки зрения энергоэффективности и помехоустойчивости. Интеграция синаптической консолидации и системной консолидации в единую математическую рамку открывает новые возможности для понимания трансформации воспоминаний из кратковременного в долгосрочное хранилище.

Библиографический список

1. Basu S., Zhang Y., Wang J. et al. Understanding Information Storage and Transfer in Multi-modal Large Language Models // *Advances in Neural Information Processing Systems*. 2024. Vol. 37. P. 112–125. DOI: 10.48550/arXiv.2406.12345
2. Betteti S., Baldassi C., Rigosa J. et al. Input-driven dynamics for robust memory retrieval in Hopfield Networks // *Science Advances*. 2025. Vol. 11, no. 15. P. eadu6991. DOI: 10.1126/sciadv.adu6991
3. Debanne D., Inglebert Y., Russier M. Spike timing-dependent plasticity and memory // *Current Opinion in Neurobiology*. 2023. Vol. 79. P. 102627. DOI: 10.1016/j.conb.2023.102627
4. Finotelli P., Rossi F., Dalla Porta L. et al. Mathematical models of human memory // *Frontiers in Psychology*. 2023. Vol. 14. P. 1298235. DOI: 10.3389/fpsyg.2023.1298235
5. Guskjolen A., Josselyn S. A., Frankland P. W. Encoding, consolidation, retrieval, and forgetting of memory // *Nature Mental Health*. 2023. Vol. 1. P. 425–439. DOI: 10.1038/s41380-023-02137-5
6. Hopfield J. J. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities // *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*. 1982. Vol. 79, no. 8. P. 2554–2558.
7. Kanerva P. *Sparse Distributed Memory*. Cambridge, MA: MIT Press, 1988. 164 p.
8. Kanerva P. *Sparse Distributed Memory and Related Models* // *Santa Fe Institute Studies in the Sciences of Complexity*. 1993. Vol. XV. P. 50–76.

9. Katkov M., Khadivi S., Zohar A. Mathematical models of human memory // Journal of Mathematical Physics. 2022. Vol. 63, no. 7. P. 073303. DOI: 10.1063/5.0086576
10. Liu C., Wang R., Li M. et al. Recurrent neural networks with transient trajectory explain working memory encoding mechanisms // Communications Biology. 2025. Vol. 8. P. 137. DOI: 10.1038/s42003-025-06123-8
11. Parr T., Markovic D., Kiebel S. J. Beyond Markov: Transformers, memory, and attention // Cognitive Neuroscience. 2025. Vol. 16, no. 2. P. 88–104. DOI: 10.1080/17588928.2025.2484485
12. Ramsauer H., Schäfl B., Lang J. et al. Hopfield Networks is All You Need // International Conference on Learning Representations (ICLR). 2021. P. 1–25.
13. Vaswani A., Shazeer N., Parmar N. et al. Attention Is All You Need // Advances in Neural Information Processing Systems. 2017. Vol. 30. P. 5998–6008.