УДК: 514.1

РАССЛОЕНИЯ, ПОРОЖДЕННЫЕ АЛГЕБРОЙ ПОЛУКВАТЕРНИОНОВ

Тришин В. Н.

к. ф.-м.н., доцент,

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,

Москва, Россия

Тришина Н. Е.

к. ф.-м.н., доцент,

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,

Российский химико-технологический университет им. Д. И. Менделеева,

Москва, Россия

Аннотация.

В статье рассматриваются расслоения, которые определяются неприводимой ассоциативными алгеброй типа VII_a. Расслоения получаются при разбиении группы Ли обратимых элементов алгебры на левые смежные классы по ее подгруппам. Получены четыре расслоения, которые соответствуют четырем типам неизоморфных подалгебр. Показано, что они тривиальны.

Ключевые слова: ассоциативная унитальная алгебра, главное расслоение, факторгруппа.

BUNDLES GENERATED BY SEMI-QUATERNION ALGEBRA

Trishin V. N.

PhD, Associate Professor,

Bauman Moscow State Technical University,

Moscow, Russia

Trishina N. E.

PhD, Associate Professor,

Bauman Moscow State Technical University,

Mendeleev University of Chemical Technology of Russia,

Moscow, Russia

Abstract.

This article considers bundles defined by an irreducible associative algebra of type VII_a. These bundles are obtained by partitioning the Lie group of invertible elements of the algebra into left cosets of its subgroups. Four bundles are obtained, corresponding to four types of nonisomorphic subalgebras. They are shown to be trivial.

Keywords: associative unital algebra, principal bundle, quotient group.

Пусть $\mathfrak{A}$ — ассоциативная унитальная алгебра размерности n, $\widetilde{\mathfrak{A}}$ — множество ее обратимых элементов. Это открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ и операции умножения и взятия обратного элемента являются гладкими функциями. Поэтому $\widetilde{\mathfrak{A}}$ — группа Ли по умножению.

Пусть $\mathfrak{B}$ — унитальная подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$, $\widetilde{\mathfrak{B}}$ — множество обратимых элементов $\mathfrak{B}$. $\widetilde{\mathfrak{B}}$ — подгруппа группы $\widetilde{\mathfrak{A}}$ по умножению и замкнутое подмножество, поэтому $\widetilde{\mathfrak{B}}$ — подгруппа Ли.

Рассмотрим фактормножество $\widetilde{\mathfrak{A}}/\widetilde{\mathfrak{B}}$ правых смежных классов. Тогда расслоение $(\widetilde{\mathfrak{A}}, \pi, \widetilde{\mathfrak{A}}/\mathbb{B})$, где π — каноническая проекция, есть главное расслоение со структурной группой $\widetilde{\mathfrak{B}}$ [7]. Доказано, что в случае, когда $\mathfrak{A}$ есть алгебра кватернионов, это главное расслоение изоморфно расслоению Хопфа [7].

Исходя из такого подхода нами рассмотрены все алгебры размерностей 3 и 4 и получены расслоения этих алгебр над фактормножествами $\widetilde{\mathfrak{A}}/\widetilde{\mathfrak{B}}$ смежных классов. Большинство получающихся расслоений тривиально. Показано, что только в 12 случаях для алгебр размерности 4 и в одном случае для алгебр размерности 3 расслоения локально тривиальны, но не тривиальны. Приведем подробное описание расслоений для неприводимой алгебры полукватернионов.

Рассмотрим алгебру $\mathfrak{A} = \mathbb{H}_0$ полуантикватернионов [1] с таблицей умножения

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	$-e_0$	e_3	$-e_2$
e_2	e_2	$-e_3$	0	0
e_3	e_3	e_2	0	0

Лемма 1 *Любая 2-плоскость, содержащая единицу является 2-подалгеброй, изоморфной либо алгебре $\mathbb{R}(e)$ двойных чисел, либо алгебре $\mathbb{R}(\varepsilon)$ дуальных чисел. Алгебра $\mathfrak{A}$ содержит два пучка подалгебр $\{e_0, e_1 + ae_3, e_2 \pm e_3\}$, изоморфных 3-алгебре типа II и единственную подалгебру $\{e_0, e_2, e_3\}$, изоморфную 3-алгебре типа III.*

Множество обратимых элементов алгебры $\mathfrak{A}$

$$\widetilde{\mathfrak{A}} = \{x^0 + x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 | (x^0)^2 - (x^1)^2 \neq 0,\ x^i \in \mathbb{R}\}$$

образует группу Ли, $\mathbb{R}^4$ без пары пересекающихся 3-плоскостей.

1. Рассмотрим 2-подалгебру $\mathbb{R}(e_1)$ с базисом $(1,\ e_1)$, изоморфную алгебре двойных чисел. Множество ее обратимых элементов

$$\mathbb{R}(e_1) = \{a + be_1 | a^2 - b^2 \neq 0\}$$

есть подгруппа Ли группы $\widetilde{\mathfrak{A}}$, 2-плоскость без пары пересекающихся прямых.

Рассмотрим фактормножество $\widetilde{\mathfrak{A}}/\mathbb{R}(e_1)$ правых смежных классов. Оно диффеоморфно 2-плоскости $\mathbb{R}^2$. Каноническая проекция

$$\pi: \widetilde{\mathfrak{A}} \to \mathbb{R}^2,$$

$$\pi(x^0 + x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3) = \frac{x^2 + x^3 e_1}{x^0 + x^1 e_1} \qquad (1)$$

задает расслоение $(\widetilde{\mathfrak{A}},\ \pi,\ \mathbb{R}^2)$. Справедлива

Теорема 1 *Расслоение* $(\widetilde{\mathfrak{A}},\ \pi, \mathbb{R}^2)$, *определяемое формулой (1), является главным тривиальным расслоением с типовым слоем, диффеоморфным 2-плоскости без пары пересекающихся прямых. Следовательно* $\widetilde{\mathfrak{A}}$ *диффеоморфно произведению* $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}(e_1)$.

2. Рассмотрим 2-подалгебру $\mathbb{R}(e_2)$ с базисом $(1,\ e_2)$, изоморфную алгебре дуальных чисел. Множество ее обратимых элементов

$$\mathbb{R}(e_2) = \{a + be_2 | a \neq 0\}$$

есть подгруппа группы $\widetilde{\mathfrak{A}}$, 2-плоскость без прямой.

Рассмотрим фактормножество $\widetilde{\mathfrak{A}}/\mathbb{R}(e_2)$ левых смежных классов. Оно диффеоморфно 2-плоскости без прямой $\mathbb{R}^2 \backslash \{x^0 = 0\} = \mathbb{R}^2_{00}$. Каноническая проекция

$$\pi: \widetilde{\mathfrak{A}} \to \mathbb{R}^2_{00},$$

$$\pi(x^0 + x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3) = \frac{(x^0)^2 - (x^1)^2 + 2(x^0 x^2 - x^1 x^3) e_2}{(x^0 + x^1)^2} \qquad (2)$$

задает расслоение $(\widetilde{\mathfrak{A}},\ \pi,\ \mathbb{R}^2_{00})$. Справедлива

Теорема 2 *Расслоение* $(\widetilde{\mathfrak{A}},\ \pi,\ \mathbb{R}^2_{00})$, *определяемое формулой (2), является главным тривиальным расслоением с типовым слоем, диффеоморфным 2-плоскости без прямой. Следовательно,* $\widetilde{\mathfrak{A}}$ *диффеоморфно произведению* $\mathbb{R}^2_{00} \times \mathbb{R}(e_2)$.

3. Рассмотрим подалгебру $\mathbb{R}(e_2,\ e_3)$ с базисом $(1,\ e_2,\ e_3)$, изоморфную 3-алгебре типа III. Множество ее обратимых элементов

$$\mathbb{R}(e_2, e_3) = \{a + b e_2 + c e_3 | a \neq 0\}$$

есть подгруппа Ли группы $\widetilde{\mathfrak{A}}$, 3-плоскость без 2-плоскости. Рассмотрим фактормножество $\widetilde{\mathfrak{A}}/\mathbb{R}(e_2, e_3)$ правых смежных классов. Оно является мультипликативной группой и диффеоморфно прямой без точки $\mathbb{R}_0$. Каноническая проекция

$$\pi: \widetilde{\mathfrak{A}} \to \mathbb{R}_0,$$

$$\pi(x^0 + x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3) = \frac{x^0 + x^1}{x^0 - x^1} \qquad (3)$$

задает расслоение $(\widetilde{\mathfrak{A}},\ \pi,\ \mathbb{R}_0)$. Справедлива

Теорема 3 *Расслоение* $(\widetilde{\mathfrak{A}},\ \pi,\ \mathbb{R}_0)$, *определяемое формулой (3), является главным тривиальным расслоением над мультипликативной группой* $\mathbb{R}_0$ *с типовым слоем, диффеоморфным 3-плоскости без 2-плоскости. Следовательно,* $\widetilde{\mathfrak{A}}$ *диффеоморфно произведению* $\mathbb{R}_0 \times \mathbb{R}(e_2, e_3)$.

4. Рассмотрим подалгебру $\mathbb{R}(e_1,\ e_2 + e_3)$, изоморфную 3-алгебре типа II, с базисом $(1,\ e_1,\ e_2+e_3)$. Множество ее обратимых элементов

$$\mathbb{R}(e_1, e_2+e_3) = \{a + be_1 + c(e_2+e_3) | a^2 - b^2 \neq 0\}$$

подгруппа Ли группы $\widetilde{\mathfrak{A}}$, 3-плоскость без пары пересекающихся 2-плоскостей.

Рассмотрим фактормножество $\widetilde{\mathfrak{A}}/\mathbb{R}(e_1, e_2+e_3)$ правых смежных классов. Оно изоморфно прямой $\mathbb{R}$. Каноническая проекция

$$\pi: \widetilde{\mathfrak{A}} \to \mathbb{R},$$

$$\pi(x^0 + x^1e_1 + x^2e_2 + x^3e_3) = \frac{x^2 - x^3}{x^0 - x^1} \qquad (4)$$

задает расслоение $(\widetilde{\mathfrak{A}},\ \pi,\ \mathbb{R})$. Справедлива

Теорема 4 *Расслоение* $(\widetilde{\mathfrak{A}},\ \pi,\ \mathbb{R})$*, определяемое формулой (4), является главным тривиальным расслоением с типовым слоем, диффеоморфным 3-плоскости без пары пересекающихся 2-плоскостей.*

Библиографический список

1. Вишневский В.В., Широков А.П., Шурыгин В.В. Пространства над алгебрами. - Казань: изд. КГУ, 1985, 262 с.

2. Shirokov A.P. Spaces over Algebras and Their Applications// Journal of Mathematical Sciences. 2002. Vol. 108, issue 2. P. 232-248. DOI: 10.1023/A:1012896320320

3. Шапуков Б.Н. Расслоения неевклидова 3-пространства гиперболического типа, порожденные алгеброй антикватернионов. I // Ученые записки казанского государственного университета. Т. 147, кн. 1. 2005, С. 181-191.

4. Кэртис Ч., Райнер И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. - М.: Наука, 1969, 688 с.

5. Норден А.П. Пространства афинной связности. - М.: Наука, 1976, 432 с.

6. Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр IV. Дифференциальная геометрия. - М.: Наука, 1988, 496 с.

7. Тришина Н.Е., Тришин В.Н. Расслоения, определяемые ассоциативными унитальными алгебрами размерности 3 и 4.// Инженерный вестник. – 2017. - №11. - С. 3.

8. Тришина Н.Е., Тришин В.Н. Расслоения, порожденные алгеброй третьего типа по классификации Штуди// Дневник науки. – 2024. - №11.

9. Kuzmina I., Mikes J. On pseudoconformal models of fibrations determined by algebra of antiquaternions and projectivization of them.// Annales mathematicae et Informaticae. -2013. – №42.