УДК 514.12

КЛАССИФИКАЦИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПОДОБИЯ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ С УЧЁТОМ ИХ РОДА

Герасимова В. И.

старший преподаватель,

Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского,

Калуга, Россия

Богачева С. А.

студент,

Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского,

Калуга, Россия

Аннотация

В работе проведено систематическое исследование группы преобразований подобия евклидовой плоскости и трёхмерного пространства. На основе основной теоремы о подобии и разложения произвольного подобия в композицию гомотетии и движения получена полная классификация подобий с учётом их рода (сохранения или изменения ориентации). Установлено, что подобие I-го рода сохраняет ориентацию репера, а подобие II-го рода – меняет ее на противоположную. Для плоскости доказано, что любое подобие I-го рода является композицией гомотетии и движения I-го рода (поворота или параллельного переноса), а подобие II-го рода — композицией гомотетии и движения II-го рода (осевой симметрии или скользящего отражения). В пространстве показано, что род подобия зависит не только от рода движения, но и от знака коэффициента гомотетии: гомотетия с отрицательным коэффициентом меняет ориентацию пространства. Получены аналитические признаки подобий через координатное задание с использованием ортогональных матриц. Доказано существование единственной неподвижной точки у любого нетождественного подобия ($k \neq 1$). Проведён сравнительный анализ изложения темы «Геометрические преобразования» в школьных учебниках (Погорелова А. В., Атанасяна Л. С., Александрова А. Д., Шарыгина И. Ф.). Предложены конкретные методические рекомендации по введению понятия общего подобия в профильном обучении. Результаты работы имеют значение как для теоретической геометрии, так и для методики преподавания математики.

Ключевые слова: преобразование подобия, гомотетия, движение, ориентация, подобие I-го рода, подобие II-го рода, классификация геометрических преобразований.

CLASSIFICATION OF SIMILARITY TRANSFORMATIONS ON THE PLANE AND IN SPACE, TAKING INTO ACCOUNT THEIR KIND

Gerasimova V. I.
Senior Lecturer,
Kaluga State University named after K. E. Tsiolkovsky,
Kaluga, Russia

Bogacheva S. A.
Student,
Kaluga State University named after K. E. Tsiolkovsky,
Kaluga, Russia

Abstract

The paper presents a systematic study of a group of similarity transformations of the Euclidean plane and three-dimensional space. Based on the basic similarity theorem and the decomposition of arbitrary similarity into a composition of homoticism and movement, a complete classification of similarities is obtained, taking into account their kind (preservation or change of orientation). It is established that the similarity of the first kind preserves the orientation of the reference point, while the similarity of the

second kind reverses it. For a plane, it is proved that any similarity of the first kind is a composition of homoticism and motion of the first kind (rotation or parallel transfer), and similarity of the second kind is a composition of homoticism and motion of the second kind (axial symmetry or sliding reflection). It is shown in space that the kind of similarity depends not only on the kind of movement, but also on the sign of the homothetic coefficient: homothetic with a negative coefficient changes the orientation of space. Analytical signs of similarities are obtained through a coordinate assignment using orthogonal matrices. The existence of a single fixed point for any non-identical similarity (k≠1) is proved. A comparative analysis of the presentation of the topic "Geometric transformations" in school textbooks has been carried out (Pogorelova A.V., Atanasyana L. S., Alexandrova A.D., Sharygina I. F.). Specific methodological recommendations for the introduction of the concept of general similarity in specialized education are proposed. The results of the work are important both for theoretical geometry and for the teaching methods of mathematics.
Keywords: similarity transformation, homoticism, movement, orientation, similarity of the first kind, similarity of the second kind, classification of geometric transformations.

Преобразования подобия составляют важнейший класс отображений в евклидовой геометрии, обобщающий движения за счёт допущения масштабирования. Если движения сохраняют расстояния, то подобия сохраняют форму фигур, изменяя их размеры пропорционально. Это свойство делает подобия мощным инструментом в решении задач на построение, доказательство и исследование, а также в прикладных областях: от архитектуры до компьютерной графики [4, 7].

Несмотря на широкое использование понятия подобия треугольников в школьном курсе, общее понятие преобразования подобия, его структура и классификация остаются вне внимания большинства учебников. Особенно слабо представлен вопрос о роде подобия – сохранении или изменении ориентации, что принципиально важно для понимания связи между подобиями и движениями [1, 3, 5].

Цель настоящей работы состоит в строгом теоретическом обосновании классификации подобий на плоскости и в пространстве с учётом их рода, выведении аналитических критериев и анализе методических аспектов изучения этой темы в школе.

Преобразованием подобия евклидовой плоскости (пространства) называется биективное отображение φ, при котором для любых точек A, Bвыполняется

$$|\varphi(A)\varphi(B)| = k \cdot |AB|, k > 0.$$

Число kназывается коэффициентом подобия.

Справедлива следующая фундаментальная теорема.

Теорема 1 (Основная теорема о подобии). Любое подобие однозначно определяется образом ортонормированного репера. Более того, для любых двух реперов R и R'с одинаковым соотношением базисных векторов существует единственное подобие, переводящее R в R' [4, 7].

Из этой теоремы следует ключевой структурный результат.

Теорема 2 (Разложение подобия). Любое подобие φс коэффициентом kможет быть представлено в виде композиции:

$$\varphi = f \circ H_O^k = H_O^k \circ g,$$

где H_O^k— гомотетия с центром O и коэффициентом k, а f, g— движения плоскости (пространства) [4, 6].

Это разложение позволяет свести изучение подобий к комбинированию двух хорошо известных классов преобразований.

Подобия I-го и II-го рода. Ориентация репера определяется знаком определителя матрицы перехода от стандартного базиса к данному. Преобразование называется подобием I-го рода, если оно сохраняет ориентацию всех реперов; в противном случае — подобием II-го рода.

Теорема 3. Любое подобие либо сохраняет ориентацию всех реперов, либо меняет её на противоположную.

Теорема 4. Гомотетия плоскости всегда является подобием I-го рода. Гомотетия пространства является подобием I-го рода при $m > 0$и II-го рода при $m < 0$ [4, 7].

Из разложения подобия и свойств движений немедленно вытекают следующие классификационные утверждения. На плоскости:

- подобие I-го рода = гомотетия $\circ$движение I-го рода (поворот, перенос);

- подобие II-го рода = гомотетия $\circ$движение II-го рода (осевая симметрия, скользящее отражение).

В пространстве:

- подобие I-го рода возникает либо как $H^m \circ f_I$при $m > 0$, либо как $H^m \circ f_{II}$при $m < 0$;

- подобие II-го рода — соответственно, $H^m \circ f_{II}$при $m > 0$или $H^m \circ f_I$при $m < 0$.

В ортонормированной системе координат подобие плоскости задаётся формулами:

$$\binom{x'}{y'} = k \cdot Q \cdot \binom{x}{y} + \binom{a}{b},$$

где Q— ортогональная матрица ($Q^T Q = I$), $\det Q = +1$ для подобий I-го рода и $\det Q = -1$— для II-го рода.

Аналогично в пространстве:

$$\mathrm{r}' = k \cdot Q \cdot \mathrm{r} + \mathrm{c}, Q \in O(3).$$

Теорема 5 (Признак подобия). Если преобразование задаётся указанными формулами с $k > 0$и ортогональной матрицей Q, то оно является подобием. Род определяется знаком $\det Q$(с учётом знака kв пространстве) [4, 7].

Теорема 6. Любое подобие с $k \neq 1$имеет единственную неподвижную точку – центр подобия.

Доказательство. Рассмотрим уравнение $\mathrm{r} = kQ\mathrm{r} + \mathrm{c}$. Перепишем как $(I - kQ)\mathrm{r} = \mathrm{c}$. Поскольку $k \neq 1$и Qортогональна, матрица $I - kQ$невырождена, следовательно, решение единственно.

Множество всех подобий образует группу относительно композиции. Эта группа содержит в качестве подгруппы группу движений (при $k = 1$) и нормальную подгруппу гомотетий с общим центром. Факторгруппа по подгруппе гомотетий изоморфна группе движений.

Важно отметить, что подобия I-го рода образуют подгруппу индекса 2 в полной группе подобий, аналогично тому, как движения I-го рода образуют подгруппу в группе движений.

На основании проведённого анализа получена следующая классификация. На плоскости:

1. Гомотетический поворот — $H_O^k \circ R_\theta$(I-го рода);
2. Гомотетическая симметрия — $H_O^k \circ S_l$(II-го рода).

В пространстве:

1. Гомотетический поворот вокруг оси (I-го рода при $k > 0$);
2. Гомотетическая симметрия относительно плоскости (II-го рода при $k > 0$);
3. При $k < 0$— комбинации с центральной симметрией, меняющей ориентацию.

Анализ действующих школьных учебников по геометрии выявляет существенные различия в подходах к изложению темы геометрических преобразований, в частности подобий. В учебнике А. В. Погорелова вводятся понятия подобия фигур и гомотетии, доказывается свойство транзитивности подобия, однако общее преобразование подобия как отображение плоскости (или пространства) на себя не формализуется и не рассматривается в рамках единой теоретической конструкции. Учебник Л. С. Атанасяна ограничивается рассмотрением подобия треугольников; термин «гомотетия» в нём отсутствует, а метод подобия, применяемый при решении задач на построение, вводится эмпирически, без опоры на общую теорию преобразований. В курсе А. Д.

Александрова затрагивается более глубокий теоретический аппарат: доказывается теорема о разложении произвольного подобия в композицию гомотетии и движения, что позволяет обосновать признаки подобия треугольников; однако эта тема изучается лишь в конце 9 класса, что не даёт возможности систематически использовать метод подобия в решении широкого круга задач на протяжении всего курса планиметрии. Наконец, в учебнике И. Ф. Шарыгина предлагается оригинальное и строгое изложение движений через композицию осевых симметрий, что способствует формированию целостного представления о группе движений, но само понятие подобия как геометрического преобразования в нём не вводится — внимание сосредоточено исключительно на подобии треугольников и фигурах, подобных в интуитивном смысле.

Учитывая выявленные недостатки, представляется целесообразным в профильных классах вводить понятие общего подобия после изучения движений, рассматривая его как естественное обобщение, допускающее масштабирование. Для углубления понимания структуры подобий рекомендуется использовать координатный метод, позволяющий явно выразить преобразование через ортогональные матрицы и коэффициент масштабирования. Важным элементом учебного процесса могут стать задачи на определение центра подобия и его коэффициента по двум парам соответственных точек, что развивает как аналитические, так и конструктивные навыки учащихся. На плоскости полезной межпредметной связью является интерпретация подобий с помощью комплексных чисел: преобразование вида $z' = kz + b$ (где $k > 0$) представляет подобие I-го рода, а $z' = k\bar{z} + b$— подобие II-го рода, что демонстрирует роль ориентации в классификации преобразований.

Таким образом, в настоящей работе дано строгое определение подобий I-го и II-го рода на основе сохранения или изменения ориентации репера, доказаны ключевые теоремы о разложении подобий в композицию гомотетии и движения, получены их координатные представления и установлено существование единственной неподвижной точки у любого нетождественного подобия. На этой основе проведена полная классификация подобий как на плоскости, так и в трёхмерном пространстве. Полученные результаты могут быть использованы как в дальнейших теоретических исследованиях по геометрии, так и при разработке учебно-методических материалов, направленных на совершенствование содержания и методики преподавания геометрических преобразований.

Библиографический список

1. Александров А. Д. Начала стереометрии. — М.: Просвещение, 1981.
2. Атанасян Л. С. Курс элементарной геометрии. — М.: Сантакс-Пресс, 1997.
3. Погорелов А. В. Элементарная геометрия. — М.: Наука, 1977.
4. Яглом И. М. Геометрические преобразования. — М.: ГИТТЛ, 1955.
5. Василевский А. Б. Метод подобия. — Минск: Народная асвета, 1985.
6. Богачёва С. А. Геометрические преобразования: подобия I-го и II-го рода. Курсовая работа. — 2025.
7. Болтянский В. Г., Яглом И. М. Энциклопедия элементарной математики. — М.: Физматгиз, 1963.
8. Прасолов В. В. Задачи по стереометрии. — М.: Наука, 1989.