УДК 517.95

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В СЛОЕ

Алгазин О.Д.

кандидат физико-математических наук, доцент

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)

Москва, Россия

Аннотация

В статье рассмотрена краевая задача для неоднородного бигармонического уравнения в бесконечном n-мерном слое $x \in \mathbb{R}^n,\ 0 < y < a$ с граничными условиями Дирихле. Получены точные решения для случая, когда правая часть уравнения является полигармонической функцией по x, в частности полиномом. В этом случае решение также является полигармонической функцией по x, в частности полиномом. Показано, что это решение единственное в классе функций медленного роста по x.

Ключевые слова: Бигармоническое уравнение, задача Дирихле, функции медленного роста, полигармонические функции.

EXACT SOLUTIONS OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE BIHARMONIC EQUATION IN A LAYER

Algazin O.D.

Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor

Bauman Moscow State Technical University

Moscow, Russia

Abstract

This article considers a boundary value problem for an inhomogeneous biharmonic equation in an infinite n-dimensional layer $x \in \mathbb{R}^n$, $0 < y < a$, with Dirichlet boundary conditions. Exact solutions are obtained for the case where the right-hand side of the equation is a polyharmonic function in x, specifically a polynomial. In this case, the solution is also a polyharmonic function in x, specifically a polynomial. This solution is shown to be unique in the class of functions of slow growth in x.

Keywords: Biharmonic equation, Dirichlet problem, slow growth functions, polyharmonic functions.

Введение

Бигармоническое уравнение $\Delta^2 u = f$ используется для описания стационарных процессов различной физической природы. Например, в плоских задачах теории упругости решение u дает прогиб пластины или балки под действием нагрузки f. В зависимости от способа закрепления краев пластины или балки задаются различные граничные условия [1]. Если, например, края пластины жестко закреплены, то получаем на границе Г условия Дирихле

$$u|_{\Gamma} = 0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 0.$$

Бигармоническое уравнение также используется в гидродинамике для описания медленных течений вязкой несжимаемой жидкости.

Решению различных краевых задач для бигармонического уравнения посвящено много работ, см. например [2]-[8].

Точные решения краевых задач для бигармонического уравнения можно получить только для некоторых областей, например для слоя в пространстве произвольной размерности. В случае плоскости это будет полоса.

Мы рассматриваем краевую задачу для неоднородного бигармонического уравнения в слое

$$\Delta^2 u(x,y) = f(x,y), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad 0 < y < a, \qquad n \geq 1, \qquad (1)$$

с граничными условиями

$$u(x,0) = u(x,a) = u_y(x,0) = u_y(x,a) = 0. \qquad (2)$$

Здесь

$$u(x,0) = \lim_{y \to 0+} u(x,y), \qquad u(x,a) = \lim_{y \to a-0} u(x,y),$$

$$u_y(x,0) = \lim_{y \to 0+} u_y(x,y), \qquad u_y(x,a) = \lim_{y \to a-0} u_y(x,y).$$

В случае $n = 1$ решение задачи $u(x,y)$ дает прогиб упругой полосы под действием нагрузки $f(x,y)$ при условии, что края полосы жестко закреплены.

.Для правой части являющейся полигармонической функцией по x (в частности - полиномом) мы даем алгоритм получения точного решения задачи. Это решение также является полигармонической функцией по x (в частности - полиномом) и в классе функций медленного роста по x является единственным

1.Постановка и решение задачи

Пусть правая часть уравнения (1) является функцией медленного роста по x, то есть для каждого $y \in (0,a)$ существует такое $m \geq 0$, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x,y)|\,(1+|x|)^{-m}dx < C\ , \qquad |x| = \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\,, \tag{3}$$

Решение задачи (1), (2) также будем искать в этом классе функций.

Рассмотрим правую часть $f(x,y)$специального вида, удовлетворяющую условию

$$\Delta_x^k f(x,y) = 0, \qquad \Delta_x = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2},$$

для некоторого k, то есть, являющуюся по переменным x полигармонической функцией, в частности полиномом. Обозначим

$$\Delta^2 = \left(\Delta_x + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 = \Delta_x^2 + 2\Delta_x\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad = B + A,$$

где

$$B = \Delta_x^2 + 2\Delta_x\frac{\partial^2}{\partial y^2}, \qquad A = \frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$

Обозначим через

$$A^{-1}f(x,y) = \frac{1}{6}\int_0^y (y-\xi)^3\, f(x,\xi)d\xi + \frac{2y^3-3ay^2}{6a^3}\int_0^a (a-\xi)^3\, f(x,\xi)d\xi +$$

$$+\frac{ay^2-y^3}{2a^2}\int_0^a (a-\xi)^2\, f(x,\xi)d\xi$$

решение краевой задачи

$$\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = f(x,y), 0 < y < a,$$

$$u(x,0) = u(x,a) = u_y(x,0) = u_y(x,a) = 0.$$

Решением задачи (1), (2) будет функция

$$u(x,y) = \left(\sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n A^{-1} (BA^{-1})^n \right)(f) \tag{4}$$

Действительно,

$$(B + A)\left(\sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n A^{-1} (BA^{-1})^n\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n (BA^{-1})^n + \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n (BA^{-1})^{n+1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n (BA^{-1})^n + \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1} (BA^{-1})^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n (BA^{-1})^n - \sum_{n=1}^{N} (-1)^n (BA^{-1})^n = I - (-1)^N (BA^{-1})^N = I,$$

где I — тождественный оператор.

То есть функция (4) является решением уравнения (1). Поскольку

$$A^{-1}(f)(x,0) = 0\,, A^{-1}(f)(x,a) = 0,$$

$$[\,A^{-1}(f)]_y(x,0) = 0, [\,A^{-1}(f)]_y(x,b) = 0,$$

то функция (4) удовлетворяет граничным условиям (2).

2. Единственность решения задачи

Для доказательства единственности решения задачи (1), (2) в классе функций медленного роста по x достаточно доказать, что однородная задача

$$\Delta^2 u(x,y) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad 0 < y < a, \qquad n \geq 1, \tag{5}$$

$$u(x,0) = u(x,a) = u_y(x,0) = u_y(x,a) = 0 \tag{6}$$

имеет только тривиальное решение.

Поскольку функции $u(x,y)$ медленного роста по x определяют для каждого y из $(0,a)$ регулярные функционалы из пространства $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ –пространства обобщенных функций медленного роста, то к ним можно применить преобразование Фурье по x [9]:

$$\mathcal{F}_x[u(x,y)](t,y) = U(t,y).$$

Применив преобразование Фурье к уравнению (5) и граничным условиям (6), получим краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка с параметром $t \in \mathbb{R}^n$

$$\left(-|t|^2 + \frac{d^2}{dy^2}\right)^2 U(t,y) = 0, \qquad 0 < y < a, \tag{7}$$

$$U(t,0) = 0, \qquad U(t,a) = 0\,, \qquad U_y(t,a) = 0\ , \quad U_y(t,a) = 0\,. \tag{8}$$

Общее решение уравнения (7) имеет вид

$$U(t,y) = c_1(t)\exp(-|t|y) + c_2(t)\exp(-|t|y) +$$
$$+c_3(t)y\exp(|t|y) + c_4(t)y\exp(|t|y). \tag{9}$$

Подставляя в (9) краевые условия (8), получим систему линейных однородных уравнений относительно коэффициентов $c_i(t), i = 1{,}2{,}3{,}4$,

$$c_1(t) + c_3(t) = 0,$$

$$-|t|c_1(t) + c_2(t) + |t|c_3(t) + c_4(t) = 0,$$

$$c_1(t)\exp(-|t|a) + c_2(t)a\exp(-|t|a) +$$

$$+c_3(t)\exp(|t|a) + c_4(t)a\exp(|t|a) = 0,$$

$$-c_1(t)|t|\exp(-|t|a) + c_2(t)(1 - |t|a)\exp(-|t|a) +$$

$$+c_3(t)|t|\exp(|t|a) + c_4(t)(1 + |t|a)\exp(|t|a) = 0.$$

Определитель этой системы

$$2\,\mathrm{ch}(2|t|a) - 4a^2|t|^2 - 2 > 0$$

для $t \neq 0$ и, следовательно, $c_1(t) = c_2(t) = c_3(t) = c_4(t) = 0$ для $t \neq 0$ и

$$U(t, y) = 0, \qquad t \neq 0, \qquad 0 < y < a.$$

Для $t = 0$ получаем для коэффициентов систему уравнений

$$c_1(0) + c_3(0) = 0, \qquad c_2(0) + c_4(0) = 0,$$

$$c_1(0) + ac_2(0) + c_3(0) + ac_4(0) = 0, c_2(0) + c_4(0) = 0.$$

Отсюда $c_3(0) = -c_1(0), c_4(0) = -c_2(0)$ и

$$U(0, y) = c_1(0) + yc_2(0) + c_3(0) + yc_4(0) = 0.$$

И, следовательно, $U(t, y) = 0, t \in \mathbb{R}^n, 0 < y < a$ и

$$u(x, y) = \mathcal{F}_x^{-1}[U(t, y)](x, y) = 0.$$

Пример.

$$\Delta^2 u(x, y) = 4x_1^2 y^2 + x_2^2 \ln(y), \qquad x \in \mathbb{R}^2, \qquad 0 < y < 1,$$
$$u(x, 0) = u(x, 1) = u_y(x, 0) = u_y(x, 1) = 0.$$

Поскольку $f(x, y) = 4x_1^2 y^2 + x_2^2 \ln(y)$, $\Delta_x^2 f = 0$, то решением задачи будет функция

$$u(x, y) = A^{-1}(f) - A^{-1}\big(BA^{-1}(f)\big) =$$
$$= \frac{1}{90} x_1^2 y^6 - \frac{1}{1260} y^8 + \frac{1}{24} x_2^2 y^4 \ln(y) - \frac{1}{180} y^6 \ln(y) - \frac{25}{288} x_2^2 y^4 +$$
$$+ \frac{49}{3600} y^6 - \frac{2}{45} x_1^2 y^3 + \frac{19}{144} x_2^2 y^3 - \frac{7}{400} y^5 + \frac{1}{30} x_1^2 y^2 - \frac{13}{288} x_2^2 y^2 +$$
$$+ \frac{17}{4320} y^4 + \frac{19}{37800} y^3 + \frac{37}{151200} y^2.$$

Заключение

В работе получены точные решения краевой задачи Дирихле для бигармонического уравнения в многомерном бесконечном слое, ограниченном двумя гиперплоскостями

$$\Delta^2 u(x,y) = f(x,y), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad 0 < y < a, \qquad n \geq 1,$$

$$u(x,0) = u(x,a) = u_y(x,0) = u_y(x,a) = 0,$$

при условии, что правая часть уравнения является полигармонической функцией по x, $\Delta_x^k f(x,y) = 0$. Это решение единственно в классе функций медленного роста по x,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,y)|\,(1+|x|)^{-m}dx < C \;, \qquad |x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\,,$$

для некоторого $m \geq 0$ для каждого $y \in (0,a)$.

Библиографический список

1. Sweers G. A survey on boundary conditions for the biharmonic // Complex Variables and Elliptic Equations, Vol. 54, No 2, February 2009, 79-93.
2. Gazzola F., Grunau H., Sweers G. Polyharmonic Boundary Value Problems: Positivity Preserving and Nonlinear Higher Order Elliptic Equations in Bounded Domains // Lecture Notes Math. V. 1991. Springer-Verlag, 2010.
3. Meleshko V.V. Selected topics in the history of the two-dimensional biharmonic problem // Applied Mechanics Reviews, 56:33–85, 2003.
4. Матевосян О.А. О решениях задачи Неймана для бигармонического уравнения в неограниченных областях // Матем. заметки, 2015, том 98, выпуск 6, 944–947 DOI: 10.4213/mzm10980
5. Карачик В.В., Торебек Б.Т. О задаче Дирихле– Рикье для бигармонического уравнения// Матем. заметки, 2017, том 102, выпуск 1, 39–51. DOI: 10.4213/mzm11035

6. Примеры точных решений задач изгиба пластины со свободными лицевыми плоскостями / Е.М.Зверяев [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 46. 17 с.DOI: 10.20948/prepr-2019-46.
7. Алгазин О.Д ., Копаев А.В. Точные решения краевой задачи Навье для бигармонического уравнения со специальной правой часть в бесконечном слое// Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2023.№3.С.6-14.
8. Алгазин О.Д., Копаев А.В. Точные решения смешанной краевой задачи для бигармонического уравнения со специальной правой частью в бесконечном слое // В сборнике: Современные проблемы физико-математических наук. Материалы IX Всероссийской научно-практической конференции. Орёл,2023. С.16-21.
9. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. - М.: Наука, 1979. 318 с