УДК 372.851

ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ С ЦЕЛОЧИСЛЕННЫМИ УРАВНЕНИЯМИ В КОНТЕКСТЕ ФОРМИРОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КОМПЕТЕНТНОСТИ УЧАЩИХСЯ И ПОДГОТОВКИ К ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ

Герасимова В. И.
старший преподаватель,
Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского,
Калуга, Россия

***Цветкова В. Е.**,*
студент,
Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского,
Калуга, Россия

Аннотация

В статье рассматривается дидактический потенциал задач на решение уравнений в целых числах как средства развития функциональной математической грамотности и логико-алгоритмического мышления учащихся. Выявлен дефицит системного изложения темы, что контрастирует с её возрастающей значимостью в структуре контрольно-измерительных материалов Единого государственного экзамена (ЕГЭ) по математике профильного уровня, в частности в задании высокого уровня сложности. На основе классификации методов решения диофантовых уравнений (перебор, факторизация, метод спуска, использование сравнений и др.) предложена методическая схема их адаптивного применения к текстовым задачам. Особое внимание уделено стратегиям ограничения перебора через оценку переменных и использованию свойств делимости. Результаты исследования указывают на необходимость целенаправленного формирования у учащихся метапредметного умения перевода неформализованного условия в целочисленную модель и её последующего анализа. Сформулированы рекомендации по разработке элективных курсов, направленных на углублённое изучение элементов теории чисел в школьном курсе.

Ключевые слова: диофантовы уравнения, оценка переменных, математическое моделирование, функциональная грамотность.

TEXT PROBLEMS WITH INTEGER EQUATIONS IN THE CONTEXT OF FORMING STUDENTS' MATHEMATICAL COMPETENCE AND PREPARING FOR FINAL ATTESTATION

Gerasimova V. I.

Senior Lecturer,

Kaluga State University named after K. E. Tsiolkovsky,

Kaluga, Russia

Tsvetkova V. E.,

Student,

Kaluga State University named after K. E. Tsiolkovsky,

Kaluga, Russia

Abstract

The article examines the didactic potential of problems solving equations in integers as a means of developing functional mathematical literacy and logical-algorithmic thinking of students. The lack of a systematic presentation of the topic has been revealed, which contrasts with its increasing importance in the structure of the control and measuring materials of the Unified State Exam (USE) in mathematics of a specialized level, in particular in the task of a high level of complexity. Based on the classification of methods for solving diophantine equations (iteration, factorization, descent method, use of comparisons, etc.), a methodological scheme for their adaptive application to text problems is proposed. Special attention is paid to strategies for limiting iteration through

the evaluation of variables and the use of divisibility properties. The results of the study indicate the need for purposeful formation of students' meta-subject ability to translate an informal condition into an integer model and its subsequent analysis. Recommendations are formulated for the development of elective courses aimed at in-depth study of the elements of number theory in the school course.
Keywords: Diophantine equations, estimation of variables, mathematical modeling, functional literacy.

В современной парадигме математического образования, ориентированной на формирование прикладных компетенций и критического мышления, особое место занимают задачи, сводящиеся к поиску решений в целых числах [1, 2]. Данный класс задач, уходящий корнями в классическую теорию диофантовых уравнений, выступает эффективным инструментом для интеграции алгебраических знаний, комбинаторных рассуждений и логического анализа. Их решение требует от учащихся не только владения формальными алгоритмами, но и развитого умения математического моделирования, поскольку условие часто представлено в виде словесного описания реальной или квазиреальной ситуации [3].

Актуальность исследования обусловлена заметным усилением роли целочисленных сюжетов в задачах повышенной сложности итоговой аттестации, прежде всего в задании №19 ЕГЭ по математике профильного уровня. Это задание, являющееся критерием дифференциации высокобалльников, регулярно содержит условия, требующие составления и анализа уравнений или их систем в целых числах с последующим отбором решений, удовлетворяющих содержательным ограничениям [4]. В то же время, как показывают результаты настоящего исследования, базовые школьные учебники не обеспечивают системного и глубокого изложения соответствующего методологического аппарата, что создаёт разрыв между требованиями экзамена и содержанием основной образовательной программы.

Целью данной работы является анализ существующего состояния вопроса преподавания решения целочисленных уравнений в общеобразовательной школе, систематизация методов их решения применительно к текстовым задачам и разработка методических ориентиров для ликвидации выявленного дидактического дефицита.

В рамках исследования был проведён контент-анализ учебников алгебры и начал математического анализа, включённых в действующий федеральный перечень [5, 6]. Критериями анализа служили: наличие явного определения диофантова уравнения, представленность базовых методов решения, количество и тип разобранных примеров (особенно текстовых задач), наличие упражнений на применение. Результаты анализа носят неоднородный характер. В некоторых учебниках [6] тема «Уравнения в целых числах» выделена в отдельный пункт, где даётся определение и рассматривается один метод (подбор). В учебных пособиях углублённого уровня, например, в линии А.Г. Мерзляка для 10–11 классов [7], элементы теории чисел, включая решение уравнений в целых числах, вынесены в приложение или отдельные параграфы. Методы излагаются более формально, представлены алгоритм Евклида и использование сравнений. Тем не менее, и здесь наблюдается слабая связь с контекстными (текстовыми) задачами, которые могли бы продемонстрировать прикладную и олимпиадную ценность изучаемых методов.

Однако, можно констатировать, что во многих учебниках федерального перечня прослеживается фрагментарность и недостаточная системность в освещении темы. Это приводит к тому, что формирование соответствующего навыка зачастую перекладывается на дополнительное образование или самостоятельную подготовку к экзамену.

Для успешного решения экзаменационных задач необходимо свободное владение спектром методов, выбор которых определяется структурой уравнения. Их можно систематизировать следующим образом:

1. **Метод прямого перебора с оценкой.** Применяется, когда область возможных значений переменных может быть эффективно сужена за

счёт неравенств, вытекающих из условия. Например, из уравнения $5x + 8y = 39$ и условия $x, y \in N$ следует $y \leq 4$, что сводит перебор к 4 случаям. Ключевым этапом является не сам перебор, а грамотное получение оценок.

2. **Метод выражения одной переменной через другую и анализа делимости.** Уравнение разрешается относительно одной переменной: $y = \frac{f(x)}{g(x)}$. Требование целочисленности y означает, что $g(x)$ должно быть делителем $f(x)$. Это сводит задачу к перебору делителей. Например, в уравнении $x^2 - xy + 5x - 9 = 0$, выражение $y = x + 5 - \frac{9}{x}$ приводит к перебору делителей числа 9.

3. **Метод разложения на множители (факторизации).** Уравнение путём группировки и тождественных преобразований приводится к виду $A(x, y) \cdot B(x, y) = C$, где C – целое число. Поскольку A и B целочисленные, задача сводится к решению конечного числа систем уравнений. Данный метод высокоэффективен для уравнений второй степени.

4. **Решение как квадратного относительно одной переменной.** Если уравнение можно рассматривать как квадратное относительно, скажем, x, то условие существования целого корня накладывает ограничение на дискриминант: он должен быть полным квадратом. Это порождает новое, часто более простое, уравнение.

5. **Использование теории сравнений (модульная арифметика).** Анализ уравнения по подходящему модулю позволяет получить необходимые условия на остатки, что резко сужает перебор. Например, уравнение $7x - 5y = 3$ по модулю 5 даёт $2x \equiv 3 (\mathrm{mod} 5)$, откуда сразу следует вид решения $x = 4 + 5t$

6. **Алгоритмические методы для линейных уравнений.** Для уравнения $ax + by = c$ при $(a, b) = 1$ стандартно используется либо алгоритм Евклида для нахождения частного решения с последующим

выписыванием общей формулы, либо метод «спуска», последовательно выражая остатки.

Текстовые задачи ЕГЭ, сводящиеся к целочисленным уравнениям, обладают характерными особенностями. Во-первых, это наличие содержательных ограничений: переменные часто обозначают количество предметов, людей, время и потому неотрицательны, а иногда и положительны. Во-вторых, неоднозначность формализации: требуется корректный выбор переменных и адекватный перевод словесных условий (типа «остаток», «разность не более чем», «кратно») на язык алгебры. В-третьих, многоэтапность решения: процесс включает не только нахождение всех целых решений уравнения, но и отбор тех, которые удовлетворяют всем скрытым и явным ограничениям задачи.

Методически важным является этап верификации модели, полученные числовые ответы должны интерпретироваться в исходном контексте на предмет осмысленности.

Рассмотрим стратегию на примере задачи (аналог задания 19 ЕГЭ): *«В группе поровну юношей и девушек... Каждый юноша отправил или 4, или 21 письмо... Все девушки получили писем поровну. Какое наименьшее количество девушек могло быть?»*

1. **Формализация.** Вводятся целочисленные переменные a (юноши, отправившие по 4 письма) и b (юноши, отправившие по 21 письму). Общее число юношей (и девушек) равно $(a+b)$. Общее число писем: $(4a+21b)$.

2. **Составление уравнения.** Условие «все девушки получили поровну» означает, что число $4a$+$21b$ делится нацело на $(a+b)$.

3. **Преобразование и анализ делимости.** Преобразуем выражение: $(4a+21b)=4(a+b)+17b$. Из условия делимости $(4(a+b)+17b) \vdots (a+b)$ следует, что и $17b \vdots (a+b)$.

4. **Логический отбор.** Так как $a, b \geq 2$ (из условия), то $a + b > b$. Значит, для выполнения $17b \vdots (a + b)$ необходимо, чтобы $(a + b)$ было делителем числа 17. Наименьший натуральный делитель, больший b, это 17. Отсюда $a + b = 17$.

5. **Построение примера.** Проверяем реализуемость при $a = 14, b = 3$. Все условия выполняются. Данный пример иллюстрирует, как аналитическая работа с делимостью заменяет трудоёмкий перебор.

В сложных задачах ключевым становится умение не устранять перебор, а делать его управляемым и конечным. Для этого применяется метод получения двусторонних оценок для переменных.

Пример. Груз вначале погрузили в вагоны по 80 тонн, но один вагон оказался загружен не полностью. Затем весь груз переложили в вагоны по 60 тонн – понадобилось на 8 вагонов больше, и снова один вагон оказался не полностью загруженным. Наконец, груз переложили в вагоны по 50 тонн – понадобилось ещё на 5 вагонов больше, и все такие вагоны были загружены полностью. Сколько было груза? Задача о погрузке груза в вагоны разной вместимости приводит к системе неравенств типа $80(x - 1) < S < 80x, 60(x + 7) < S < 60(x + 8), S = 50(x + 13)$. Подстановка S даёт систему линейных неравенств для x, из которой находится узкий интервал возможных целых значений. Последующая проверка единственного кандидата даёт ответ. Эта техника напрямую связана с формированием компетенции работы с неравенствами и понимания того, как арифметические ограничения порождают ограничения на неизвестные.

Проведённое исследование подтверждает существование разрыва между востребованностью навыков решения целочисленных задач в рамках итоговой аттестации и уровнем их методической проработки в базовых школьных учебниках. Целочисленные уравнения представляют собой не просто отдельную тему, а метапредметный инструмент, интегрирующий алгебру, теорию чисел и логику.

Для совершенствования учебного процесса предлагается:

1. Интеграция элементов теории чисел в основные курсы алгебры 7–9 классов через серию специально разработанных текстовых задач.
2. Разработка модульного элективного курса для 10–11 классов «Элементы диофантова анализа в задачах», систематизирующего методы и focusing на подготовке к заданиям высокого уровня сложности.
3. Создание цифрового банка задач с пошаговыми решениями и разбором типичных ошибок, ориентированного на самостоятельную работу учащихся.
4. Повышение квалификации учителей в области методов решения нестандартных задач, включая целочисленные, через тематические семинары и вебинары.

Дальнейшие исследования могут быть направлены на изучение эффективности различных педагогических технологий (например, проблемного обучения, case-study) в контексте формирования умения решать сложные целочисленные задачи, а также на анализ динамики изменения подобных заданий в КИМ ЕГЭ.

Библиографический список

1. Сергеев И. Н. Математика. Задачи с ответами и решениями: пособие для поступающих в вузы. — М.: КДУ, 2004. — 360 с.
2. Галкин Е. В. Нестандартные задачи по математике. Задачи с целыми числами. — Челябинск: Взгляд, 2005. — 271 с.
3. Далингер В.А. Методика обучения учащихся решению текстовых задач: монография. — Омск: Изд-во ОмГПУ, 2007. — 256 с.
4. Ященко И. В., Высоцкий И. Р., Захаров П. И. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень. Типовые экзаменационные варианты. 36 вариантов. — М.: Национальное образование, 2024. — 208 с.

5. Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования (утверждён приказом Минпросвещения России). — URL: https://fpu.edu.ru/ (дата обращения: 15.01.2025).

6. Макарычев Ю. Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И., Феоктистов И. Е. Алгебра. 7 класс: учебник для общеобразовательных организаций (углублённый уровень) / под ред. С.А. Теляковского. — М.: Мнемозина, 2023.

7. Мерзляк А.Г., Номировский Д.А., Поляков В. М. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учебник для учащихся общеобразовательных организаций (углублённый уровень) / под ред. В.Е. Подольского. — М.: Вентана-Граф, 2023.

8. Садовничий Ю. В. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень. Решение задач и уравнений в целых числах. — М.: Экзамен, 2019. — 128 с.

9. Латанова Н. И., Власова А. П., Евсеева Н. В. Решение уравнений в целых числах: учеб. пособие. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2012. — 80 с.

10. Нестерова Л. Ю., Напалков С.В. Теория чисел: учебник и практикум для вузов. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Юрайт, 2025. — 312 с.