

УДК 372.851

***РАЗВИТИЕ УМЕНИЙ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ  
КАК КОМПОНЕНТ ПОДГОТОВКИ К ПРОФИЛЬНОМУ ЕГЭ ПО  
МАТЕМАТИКЕ***

***Герасимова В. И.***

*старший преподаватель,*

*Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского,*

*Калуга, Россия*

***Големина Э. Е.,***

*студент,*

*Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского,*

*Калуга, Россия*

**Аннотация.**

В статье рассматривается проблема недостаточного освещения темы «Уравнения в целых числах» в основных школьных учебниках математики, включенных в федеральный перечень, несмотря на её ключевое значение для успешного выполнения задания №19 профильного Единого государственного экзамена (ЕГЭ). Проводится анализ содержания учебных пособий, систематизируются основные типы диофантовых уравнений и методы их решения, а также рассматриваются характерные текстовые задачи и задачи на делимость. На основе проведённого исследования обосновывается необходимость разработки дополнительных учебно-методических материалов, направленных на формирование у учащихся устойчивых навыков решения нестандартных задач с целочисленными параметрами и переменными. Статья может быть использована

учителями математики, методистами и разработчиками образовательного контента.

**Ключевые слова:** уравнения в целых числах, диофантовы уравнения, делимость, методика преподавания математики.

***DEVELOPING SKILLS IN SOLVING EQUATIONS IN INTEGERS AS A  
COMPONENT OF PREPARATION FOR THE SPECIALIZED UNIFIED  
STATE EXAM IN MATHEMATICS***

***Gerasimova V. I.***

*Senior lecturer,*

*Kaluga State University named after K. E. Tsiolkovsky,*

*Kaluga, Russia*

***Golemina E. E.,***

*student,*

*Kaluga State University named after K. E. Tsiolkovsky,*

*Kaluga, Russia*

**Annotation.**

The article examines the problem of insufficient coverage of the topic "Equations in integers" in the main school textbooks of mathematics included in the federal list, despite its key importance for the successful completion of task No. 19 of the Unified State Exam (USE). The content of textbooks is analyzed, the main types of diophantine equations and methods for solving them are systematized, and characteristic text problems and divisibility problems are considered. Based on the research conducted, the necessity of developing additional educational and methodological materials aimed at developing students' stable skills in solving non-standard tasks with integer parameters and variables is substantiated. The article can be used by math teachers, methodologists, and educational content developers.

**Keywords:** equations in integers, Diophantine equations, divisibility, methods of teaching mathematics.

Современные требования к результатам обучения математике в старшей школе, отраженные в Федеральных государственных образовательных стандартах (ФГОС) и контрольно-измерительных материалах ЕГЭ, предполагают не только усвоение базовых алгоритмов, но и развитие логического мышления, умения работать с нестандартными формулировками и применять математические знания в изменённых ситуациях. Задание №19 профильного ЕГЭ по математике традиционно является заданием высокого уровня сложности, проверяющим эти компетенции. Значительная часть таких задач сводится к решению уравнений или их систем в целых числах, исследованию делимости, поиску целочисленных решений с учётом дополнительных условий.

Однако, как показывает проведённый анализ федерального перечня учебников на 2024-2025 учебный год, систематическое изложение теории и методов решения уравнений в целых числах представлено крайне скудно. Тема фрагментарно затрагивается лишь в единичных учебных пособиях, таких как учебник алгебры для 7 класса под редакцией Ю.Н. Макарычева [8] и учебник для углублённого изучения математики в 10 классе А.Г. Мерзляка и др. [9]. Такой дефицит учебных материалов создаёт серьёзные трудности как для учащихся, самостоятельно готовящихся к экзамену, так и для учителей, вынужденных компенсировать этот пробел за счёт дополнительных источников.

Цель данной работы состоит в систематизация основных подходов к решению задач в целых числах, актуальных для ЕГЭ, и обоснование необходимости их целенаправленного включения в учебный процесс.

Уравнение в целых числах (диофантово уравнение) — это уравнение вида  $P(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ , где  $P$  — многочлен с целыми коэффициентами, решение которого ищется в множестве целых чисел  $Z$  [6, 7]. Наиболее часто в школьной Дневник науки | [www.dnevniknauki.ru](http://www.dnevniknauki.ru) | СМИ Эл № ФС 77-68405 ISSN 2541-8327

практике и на ЕГЭ встречаются линейные диофантовы уравнения с двумя неизвестными  $ax + by = c$  и уравнения, сводящиеся к ним, а также уравнения, решаемые методом разложения на множители или исследованием делимости.

Можно выделить несколько базовых методов, владение которыми необходимо для успешного решения задач №19:

1. Метод перебора ограниченного числа вариантов, основанный на оценке переменных.
2. Метод выражения одной переменной через другую с последующим анализом делимости.
3. Метод разложения на множители, когда уравнение преобразуется к виду  $A(x, y) \cdot B(x, y) = N$ , и задача сводится к перебору конечного числа пар делителей числа  $N$  [5].
4. Решение линейного диофантова уравнения с использованием алгоритма Евклида для нахождения частного решения и формулы общего решения [2, 7].
5. Использование сравнений по модулю для сужения множества возможных решений за счёт анализа остатков [3].
6. Метод «бесконечного спуска», применяемый чаще для доказательства отсутствия решений.

Особую важность имеют текстовые задачи, условие которых при формализации приводит к уравнению или системе уравнений в целых числах. Их решение требует развитого умения математического моделирования: перевода бытового или сюжетного контекста на язык алгебры с последующей интерпретацией полученного решения [4]. Примеры таких задач – задачи на движение, совместную работу, деление предметов с остатком и др.

Не менее важным разделом является теория делимости. Свойства и признаки делимости, основная теорема арифметики о единственности разложения на простые множители являются мощным инструментом для

доказательств и поиска решений [7]. Задачи на делимость часто комбинируются с параметрическими уравнениями, что повышает их сложность.

Проведённый контент-анализ действующих учебников показал, что задачи на целочисленные решения, как правило, носят эпизодический характер и не выстроены в систему. Учащиеся знакомятся с понятием делимости, но редко применяют его для решения нелинейных уравнений или сложных текстовых задач. Углублённые учебники [9] уделяют теме больше внимания, но их использование ограничено профильным уровнем.

В то же время, в открытом банке заданий ЕГЭ и материалах прошлых лет представлено множество задач, для которых владение целочисленными методами является ключевым. Это задачи на нахождение всех целочисленных решений уравнений, на исследование свойств чисел (окончание на определённые цифры, кратность), на делимость с параметром, текстовые задачи, где искомые величины (количество людей, деталей, монет) являются целыми.

Примером может служить задача на нахождение всех четырёхзначных чисел  $n$ , для которых десятичная запись  $n^2 + 2n$  оканчивается цифрами числа  $n$ . Её решение сводится к уравнению  $n(n + 1) = 10000k$ , после чего используется разложение на множители и анализ делимости на  $2^4$  и  $5^4$  [1].

Для преодоления разрыва между требованиями ЕГЭ и содержанием базовых учебников целесообразно:

1. Разработать и внедрить элективный курс или систему специальных занятий для 10-11 классов, посвящённых решению задач в целых числах. Программа такого курса должна включать теоретический блок (свойства делимости, виды диофантовых уравнений, методы решений) и обширный практикум, построенный на задачах ЕГЭ прошлых лет и авторских разработках [2, 4].

2. Создать дидактический сборник задач с пошаговым разбором методов, классификацией по типам и уровню сложности. Такой сборник может стать основным рабочим инструментом для учителя и учащихся.

3. Интегрировать задачи на целочисленные решения в текущие темы школьного курса (при изучении делимости, квадратных уравнений, систем уравнений, текстовых задач), формируя у учащихся представление о методах как об универсальном инструменте.

4. Использовать исторический контекст (труды Диофанта, Пьера Ферма) для повышения мотивации и демонстрации практической значимости теории чисел [6].

Уравнения и задачи в целых числах представляют собой важный раздел элементарной математики, развивающий логическое, алгоритмическое и комбинаторное мышление. Их решение требует глубокого понимания свойств целых чисел и владения специфическими методами. Недостаточное отражение этой темы в основных школьных учебниках создаёт объективную трудность для подготовки к профильному ЕГЭ.

Систематическая работа по формированию соответствующих умений, основанная на дополнительных учебно-методических ресурсах и целенаправленном включении задач в учебный процесс, способна не только повысить результативность на экзамене, но и обогатить математическую культуру учащихся, подготовив их к решению более сложных проблем в будущей учебной и профессиональной деятельности. Дальнейшие исследования могут быть направлены на оценку эффективности разработанных методических материалов и их влияния на уровень математической подготовки выпускников.

### **Библиографический список**

1. Открытый банк заданий ЕГЭ ФИПИ по математике (профильный уровень). – URL:
2. Садовничий, Ю. В. ЕГЭ 2019. 100 баллов. Математика. Профильный уровень. Решение задач и уравнений в целых числах / Ю. В. Садовничий. – М.: Экзамен, 2019. – 128 с.

3. Сергеев, И. Н. МАТЕМАТИКА. Задачи с ответами и решениями: пособие для поступающих в вузы / И. Н. Сергеев. – 2-е изд., доп. – М.: КДУ, 2004. – 360 с.
4. Галкин, Е. В. Нестандартные задачи по математике. Задачи с целыми числами: Учеб. пособие для 7-11 кл. / Е. В. Галкин. – Челябинск: Взгляд, 2005. – 271 с.
5. Латанова, Н. И. Решение уравнений в целых числах: учеб. пособие / Н. И. Латанова, А. П. Власова, Н.В. Евсеева. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2012. – 80 с.
6. Маскина, М. С. Диофантовы уравнения: учебное пособие / М.С. Маскина, С.А. Моисеев. – М.: Прометей, 2011. – 120 с.
7. Нестерова, Л. Ю. Теория чисел : учебник и практикум для вузов / Л. Ю. Нестерова, С. В. Напалков. – 2-е изд. – М. : Юрайт, 2025. – 300 с.
8. Алгебра. 7 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / [Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова]; под ред. С.А. Теляковского. – М.: Просвещение, 2023.
9. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. 10 класс: учеб. для общеобразоват. организаций с углубл. изучением математики / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номировский, В.М. Поляков; под ред. В.Е. Подольского. – М. : Вентана-Граф, 2023.
10. Федеральный перечень учебников. – URL: <https://fpu.edu.ru>