УДК 372.851

ЛИНИИ УРОВНЯ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ КАК ИНСТРУМЕНТ АНАЛИЗА И ОБУЧЕНИЯ

Герасимова В. И.
старший преподаватель,
Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского,
Калуга, Россия

Дёмкина В. Б.
студент,
Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского,
Калуга, Россия

Аннотация.
В статье рассматривается методология применения линий уровня функций двух переменных как междисциплинарного инструмента, объединяющего строгий математический анализ и современные образовательные технологии. Обосновывается их роль в преодолении когнитивных барьеров при изучении многомерного анализа, демонстрируется связь с топологией, оптимизацией и прикладными задачами. Предложены разноуровневые учебные задания и методические рекомендации по использованию интерактивных сред (GeoGebra, Desmos) с учётом этических рисков внедрения ИИ в образовательный процесс. Особое внимание уделено развитию критического мышления и метапредметных компетенций обучающихся.

Ключевые слова: линии уровня, функции нескольких переменных, визуализация, математическое образование, градиент, оптимизация, активные методы обучения, искусственный интеллект в образовании.

LEVEL LINES ARE FUNCTIONS OF TWO VARIABLES AS A TOOL FOR ANALYSIS AND LEARNING

Gerasimova V. I.
Senior lecturer,
Kaluga State University named after K. E. Tsiolkovsky,
Kaluga, Russia

Demkina V. B.
student,
Kaluga State University named after K. E. Tsiolkovsky,
Kaluga, Russia

Annotation.
The article discusses the methodology of applying lines of the level of functions of two variables as an interdisciplinary tool combining rigorous mathematical analysis and modern educational technologies. Their role in overcoming cognitive barriers in the study of multidimensional analysis is substantiated, and their connection with topology, optimization, and applied tasks is demonstrated. Multi-level learning tasks and methodological recommendations on the use of interactive environments (GeoGebra, Desmos) are proposed, taking into account the ethical risks of introducing AI into the educational process. Special attention is paid to the development of critical thinking and meta-subject competencies of students.
Keywords: level lines, functions of several variables, visualization, mathematical education, grad, optimization, active learning methods, artificial intelligence in education.

Изучение функций нескольких переменных традиционно представляет собой одну из наиболее сложных тем в курсе математического анализа для студентов педагогических и технических специальностей. Когнитивные трудности, связанные с необходимостью трёхмерного мышления, часто приводят к формальному усвоению материала без глубокого понимания [2, 5]. В условиях цифровой трансформации образования возрастает потребность в визуально-интуитивных инструментах, способных транслировать абстрактные математические конструкции в доступную форму. Линии уровня выступают в качестве такого «когнитивного моста», позволяя проецировать трёхмерную поверхность на двумерную плоскость без потери ключевой информации о её топологии.

Актуальность темы обусловлена не только педагогическими вызовами, но и расширением сфер применения линий уровня в науке и практике: от топографического картографирования до машинного обучения. В статье систематизированы теоретические основы линий уровня [7, 10], расширено их применение в задачах оптимизации и показана практико-ориентированная методика обучения, учитывающая возможности и риски современных цифровых технологий [6, 13].

Пусть $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ - скалярная функция, определённая на открытом множестве D. Линией уровня, соответствующей значению $c \in \mathbb{R}$, называется множество

$$L_c = \{(x, y) \in D \mid f(x, y) = c\}.$$

Это множество представляет собой прообраз точки cпри отображении f, что подчёркивает его топологическую природу [7]. Если f непрерывна, то L_c является замкнутым подмножеством D.

Фундаментальное дифференциальное свойство линий уровня заключается в их ортогональности к градиенту функции. Пусть f дифференцируема в точке $(x_0, y_0) \in D$ и $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда существует окрестность этой точки, в которой $L_{f(x_0, y_0)}$ является гладкой кривой, и вектор градиента $\nabla f(x_0, y_0)$ ортогонален касательной к этой кривой. Это утверждение является прямым следствием теоремы о неявной функции и лежит в основе геометрической интерпретации направления наибыстрейшего роста функции [10, 12].

Линии уровня служат эффективным инструментом для реконструкции топологии графика функции $z = f(x, y)$. Каждая линия L_c есть горизонтальное сечение поверхности плоскостью $z = c$, спроецированное на плоскость Oxy. Совокупность таких линий для различных значений cформирует контурную карту, которая кодирует информацию о экстремумах (замкнутые линии уровня, сгущающиеся к центральной точке, указывают на наличие локального минимума или максимума), седловых точках (конфигурация, при которой линии уровня пересекаются или образуют «гиперболический» узор, сигнализирует о седловой точке), плато и «оврагах» (зоны с редкими линиями соответствуют малому градиенту (плато), тогда как плотные линии – крутым склонам).

Таким образом, контурная карта позволяет проводить качественный анализ функции без построения её трёхмерного графика, что особенно ценно при работе с функциями, не имеющими аналитического выражения, но заданными таблично или численно.

Ключевые свойства линий уровня вытекают из определения функции как однозначного отображения:

1. Непересекаемость: для $c_1 \neq c_2$множества L_{c_1}и L_{c_2}не имеют общих точек. Это следует из того, что одна и та же точка (x, y)не может одновременно удовлетворять двум уравнениям $f(x, y) = c_1$и $f(x, y) = c_2$.
2. Плотность как мера градиента: расстояние Δdмежду соседними линиями уровня обратно пропорционально модулю градиента:

$$\parallel \nabla f(x, y) \parallel \approx \frac{\Delta c}{\Delta d},$$

где Δc – фиксированный шаг между значениями уровней. Это свойство лежит в основе количественной интерпретации контурных карт в геофизике и метеорологии [10].

3. Замкнутость: для непрерывных функций, определённых на компактных областях, линии уровня, соответствующие регулярным значениям, являются замкнутыми кривыми. Однако это не всегда верно для некомпактных областей или критических значений (например, для функции $f(x, y) = x$ линии уровня – параллельные прямые).

Линии уровня позволяют классифицировать критические точки без вычисления вторых производных. Рассмотрим поведение линий уровня в окрестности стационарной точки (x^*, y^*), где $\nabla f(x^*, y^*) = 0$. Локальный минимум/максимум – семейство вложенных замкнутых кривых, сгущающихся к (x^*, y^*). Седловая точка – линии уровня образуют гиперболы, пересекающиеся в (x^*, y^*); при $c = f(x^*, y^*)$линия уровня может вырождаться в пару пересекающихся прямых.

Этот визуальный подход особенно полезен в учебном процессе, поскольку он развивает геометрическую интуицию и снижает алгебраическую нагрузку на студентов.

Траектория градиентного спуска $\mathrm{x}_{k+1} = \mathrm{x}_k - \alpha_k \nabla f(\mathrm{x}_k)$ортогональна линиям уровня в каждой точке. На контурной карте это выглядит как «спираль», ведущая к минимуму. Анализ плотности линий позволяет адаптировать шаг α_k: в зонах с высокой плотностью (крутой склон) шаг должен быть меньше, чтобы избежать осцилляций.

Более того, методы второго порядка (например, Ньютона) можно интерпретировать как попытку «выпрямить» линии уровня, делая их более круглыми, что ускоряет сходимость.

Задача $\min f(x, y)$ при ограничении $g(x, y) = 0$ имеет наглядную геометрическую интерпретацию: решение достигается в точке касания линии уровня $f(x, y) = c$ и линии ограничения $g(x, y) = 0$. В этой точке градиенты ∇f и ∇g коллинеарны, что составляет суть метода множителей Лагранжа.

Визуализация этого факта через линии уровня значительно облегчает понимание студентами сути условной оптимизации [8, 10].

Функция $f(x, y) = x^2 + y^2$ имеет линии уровня $x^2 + y^2 = c$, которые при $c > 0$ являются концентрическими окружностями. При $c = 0$ линия уровня вырождается в точку – глобальный минимум. Эта простая модель иллюстрирует все ключевые свойства: замкнутость, сгущение к центру, ортогональность радиального градиента [8, 10].

Для функции $f(x, y) = x^2 - y^2$линии уровня задаются уравнением $x^2 - y^2 = c$. При $c > 0$ – гиперболы, ветви которых направлены вдоль оси Ox; при $c < 0$ – вдоль оси Oy; при $c = 0$ – пара пересекающихся прямых $y = \pm x$. Эта конфигурация визуально демонстрирует седловую точку в начале координат [8, 10].

Для углубления понимания важно рассмотреть функции, выходящие за рамки гладкого анализа, периодическая функция $f(x, y) = \sin x + \cos y$. Линии уровня образуют периодическую решётку, что иллюстрирует многомерную периодичность. Недифференцируемая функция: $f(x, y) =| x | +| y |$. Линии уровня — квадраты с вершинами на осях. В углах градиент не определён, что демонстрирует границы применимости дифференциального исчисления. Такие примеры развивают у студентов критическое мышление и понимание условий применимости теорем.

Современные цифровые инструменты (GeoGebra, Desmos, Matplotlib в Python) позволяют динамически варьировать параметры функции и наблюдать за изменением линий уровня в реальном времени. Это трансформирует пассивное восприятие в активное исследование. Например, студент может «потянуть» за коэффициенты в функции $f(x, y) = ax^2 + by^2$ и увидеть, как эллипсы превращаются в гиперболы при смене знака [6, 13].

Предлагается следующая система заданий для студентов и учащихся профильных классов.

1. Базовый уровень (построить линии уровня для квадратичных функций).
2. Повышенный уровень (по заданной картинке линий уровня восстановить возможный вид функции).
3. Творческий уровень (придумать функцию, линии уровня которой образуют заданный узор, например сердце или спираль).
4. Исследовательский уровень (проанализировать, как строит линии уровня для функции с изломом, и критически оценить корректность результата/).

Использование ИИ в обучении должно быть направлено не на замену мышления, а на его стимуляцию. Задания должны требовать от обучающегося интерпретации, критики и рефлексии над результатами, выдаваемыми ИИ. Например: «Проанализируйте, корректно ли ИИ построил линии уровня для функции $f(x,y) = \max(x,y)$? Обоснуйте своё мнение». Такой подход формирует метапредметные компетенции и снижает риск академической зависимости от технологий.

Линии уровня находят широкое применение в самых разных областях науки и практики. В топографии они известны как горизонтали и используются для отображения рельефа местности на картах. Горизонтали соединяют точки земной поверхности, имеющие одинаковую высоту над уровнем моря. Интервал между соседними горизонталями позволяет судить о крутизне склона: частое расположение горизонталей указывает на крутой склон, тогда как редкое – на пологий участок. Это делает топографические карты незаменимыми инструментами для геодезистов, картографов, туристов и военных при планировании маршрутов и ориентировании на местности.

В метеорологии линии уровня применяются в виде изобар – линий равного атмосферного давления на синоптических картах. Анализ конфигурации изобар позволяет определять зоны высокого и низкого давления, атмосферные фронты и направление ветров. Например, замкнутые изобары с низким давлением в центре обычно ассоциируются с циклонами и нестабильной погодой, в то время как области высокого давления (антициклоны) соответствуют ясному и спокойному небу.

В экономике линии уровня используются для анализа предпочтений потребителей и производственных возможностей. Кривые безразличия, являющиеся линиями уровня функции полезности, показывают все комбинации двух товаров, которые приносят потребителю одинаковое удовлетворение. Аналогично, изокванты (линии уровня производственной функции) иллюстрируют различные комбинации факторов производства (например, труда и капитала), необходимые для выпуска заданного объёма продукции. Эти инструменты позволяют экономистам оптимизировать распределение ограниченных ресурсов с целью максимизации прибыли или удовлетворения потребностей.

Линии уровня функции двух переменных – это не просто вспомогательный графический приём, а мощный аналитический и дидактический инструмент. В статье рассмотрена расширенная методология их применения, охватывающая строгую математическую теорию, прикладные задачи оптимизации и современные подходы к обучению. Особое внимание уделено формированию у обучающихся критического отношения к цифровым инструментам и развитию метапредметных навыков.

Перспективы дальнейших исследований связаны с разработкой ИИ-ассистентов, способных генерировать персонализированные учебные задания на основе анализа ошибок студентов, а также с созданием методик оценки качества визуализаций, предоставляемых ИИ.

Библиографический список

1. Абдурахманов А.Г. Применение математических пакетов в образовании на примере математического пакета Maple // Pedagogical Cluster - Journal of Pedagogical Developments. — 2023. — №2. — С. 152–156.

2. Архипова Н.А., Евдокимова Н.Н., Казеев А.Е. и др. Визуализация как один из методов изучения математики в техническом вузе // Мир науки. Педагогика и психология. — 2024. — №3. — С. 1–9.
3. Баданова Т.А., Костенко А.В., Трунтаева Т.И. Диагностика эффективности интерактивных методов обучения математическим дисциплинам бакалавров экономики // Интернет-журнал «Науковедение». — 2015. — №5. — С. 1–5.
4. Воронцова Е.А., Гасников А.В., Горбунов Э.А. Ускоренный спуск по случайному направлению с неевклидовой прокс-структурой // Автоматика и телемеханика. — 2019. — №4. — С. 126–143.
5. Калитина В.В. Визуализированная среда обучения математике будущих учителей естествознания // Открытое образование. — 2014. — №1. — С. 56–59.
6. Кандалова М.А. Методика и технология преподавания математических дисциплин в высшей школе // Педагогический журнал. — 2022. — С. 461–465.
7. Кузьмина Г.В. Геометрическая теория функций: методы и результаты // Известия высших учебных заведений. Математика. — 1986. — №10. — С. 17–33.
8. Логвенков С.А., Мышкис П.А., Самовол В.С. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных. — Москва: Издательство МЦНМО, 2011. — 39 с.
9. Матвеева Л.Д., Рудый А.Н. Математический анализ. Функции нескольких переменных. Курс лекций для студентов инженерно-технических и экономических специальностей. — Минск: БНТУ, 2019. — 70 с.
10. Zollman, A. et al. Visualization in mathematics education: A review of empirical research. *Educational Studies in Mathematics*, 2021, vol. 107, pp. 1–25.
11. Tall, D. Visualizing differentials in two and three dimensions. *Teaching Mathematics and its Applications*, 2020, vol. 39, no. 2, pp. 78–92.

12. Holmes, W., Bialik, M., & Fadel, C. (2023). *Artificial Intelligence in Education: Promises and Implications for Teaching and Learning*. Center for Curriculum Redesign.