

УДК 519.6

***ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТИ МЕЖОРБИТАЛЬНОГО
ПЕРЕЛЕТА МАЛОГО КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ОРБИТЫ ЗЕМЛИ
НА ОРБИТУ МЕРКУРИЯ ПОД СОЛНЕЧНЫМ ПАРУСОМ***

Мозжорина Т.Ю.

к.т.н., доцент,

*Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет),*

г. Москва, Россия

Климачева М.С.

студент,

*Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет),*

г. Москва, Россия

Аннотация.

В данной статье исследуется возможность реализации межорбитального перелета малого космического аппарата под солнечным парусом с орбиты Земли на орбиту Меркурия. Оптимизация управления солнечным парусом основана на применении принципа максимума Понтрягина, сводящего задачу оптимального управления к решению краевой задачи. Решение краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений проведено методом пристрелки. Математическая модель имеет ряд допущений: орбиты планет лежат в одной плоскости, для Земли рассмотрена средняя круговая орбита, солнечный парус идеален, не теряет своих свойств с течением времени, действие силы паруса лежит на нормали к поверхности. Вместе с этим, учитывая наибольшую эллиптичность орбиты Меркурия среди планет солнечной системы, расчетные исследования были проведены не только для средних значений параметров скорости и радиуса орбиты Меркурия, но и для точек афелия и перигелия орбиты. Алгоритм был реализован на языке Дневник науки | www.dnevniknauki.ru | СМИ Эл № ФС 77-68405 ISSN 2541-8327

программирования C++. Проведен анализ точности полученных результатов и показана возможность применения метода пристрелки при решении подобных задач.

Ключевые слова: оптимальное управление, перелет между орбитами Земли и Меркурия, краевые задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, метод пристрелки, солнечный парус, принцип максимума Понтрягина.

***STUDY OF THE POSSIBILITY OF INTERORBITAL TRANSFER OF A
SMALL SPACE VEHICLE FROM EARTH ORBIT TO MERCURY ORBIT
UNDER A SOLAR SAIL***

Mozzhorina T.Yu.

Ph.D., assistant professor,

Bauman Moscow State Technical University,

Moscow, Russia

Klimacheva M.S.

student,

Bauman Moscow State Technical University,

Moscow, Russia

Abstract.

The solution of the boundary value problem for the system of ordinary differential equations was carried out using the shooting method. The mathematical model has a number of assumptions: the orbits of the planets lie in the same plane, the average circular orbit is considered for the Earth, the solar sail is ideal, does not lose its properties over time, the action of the sail force lies on the normal to the surface. At the same time, taking into account the greatest ellipticity of Mercury's orbit among the planets of the solar system, calculation studies were carried out not only for the average values of the parameters of the speed and radius of Mercury's orbit, but also

for the aphelion and perihelion points of the orbit. The algorithm was implemented in the C++ programming language. An analysis of the accuracy of the obtained results is carried out and the possibility of using the shooting method in solving such problems is shown.

Keywords: optimal control, flight between the orbits of the Earth and Mercury, boundary value problems for a system of ordinary differential equations, shooting method, solar sail, Pontryagin's maximum principle.

Введение.

В данной работе проводится численный эксперимент перелета малого космического аппарата (КА) между орбитами Земли и Меркурия под солнечным парусом (СП). Несмотря на то, что с момента первых предложений использовать силу света в межпланетных перелетах прошло уже несколько десятилетий, теоретические расчетные исследования возможных реализаций таких проектов, а также экспериментальные разработки подобных конструкций не теряют актуальности. Наоборот, с развитием вычислительной техники и разработкой новых конструкционных материалов интерес к подобным исследованиям только возрастает [5, 6], [7, 8], [10, 11, 12].

Оптимизация управления углом установки СП была проведена с применением принципа максимума Понтрягина. В результате использования принципа максимума задача оптимального управления (ОУ) сводится к решению краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений [3, 4]. Краевая задача была решена численным методом пристрелки [9]. Расчетный эксперимент проводился для краевых условий на правом конце не только для осредненной орбиты Меркурия, но и для параметров, соответствующих точкам афелия и перигелия эллиптической орбиты.

Математическая постановка задачи. Уравнения движения КА в полярной гелиоцентрической системе координат, а также сопряженная система

и функция Понтрягина при минимизации времени перелета приведены ниже.

Функционал задачи ОУ $J = \int_0^{T_s} dt = T_s \rightarrow \min$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dU}{dt} = \frac{V^2}{R} - A_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 + \alpha \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \cos^3 \theta \\ \frac{dV}{dt} = -\frac{UV}{R} - \alpha \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \sin \theta \cos^2 \theta \\ \frac{dR}{dt} = U \\ \frac{d\varphi}{dt} = \frac{V}{R} \\ \frac{d\psi_U}{dt} = \frac{\psi_V V}{R} - \psi_R \\ \frac{d\psi_V}{dt} = -\frac{2\psi_U V}{R} + \frac{\psi_V U}{R} - \frac{\psi_\varphi}{R} \\ \frac{d\psi_R}{dt} = \psi_U \left(\frac{V^2}{R^2} - \frac{2A_0 R_0^2}{R^3} + \frac{2\alpha R_0^2 \cos^3 \theta}{R^3} \right) - \psi_V \left(\frac{UV}{R^2} + \frac{2\alpha R_0^2 \cdot \cos^2 \theta \cdot \sin \theta}{R^3} \right) + \\ + \psi_\varphi \frac{V}{R^2} \\ \frac{d\psi_\varphi}{dt} = 0 \end{array} \right.$$

$$H = \psi_U \left(\frac{V^2}{R} - A_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 + \alpha \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \cos^3 \theta \right) + \psi_V \left(-\frac{UV}{R} - \alpha \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \sin \theta \cos^2 \theta \right) + \psi_R U + \psi_\varphi \frac{V}{R} - 1$$

Здесь U - радиальная составляющая скорости КА в гелиоцентрической системе координат (см. рис. 1), м/сек; V - тангенциальная составляющая скорости, м/сек; R - расстояние от Солнца до КА, м; φ - полярный угол КА, рад; T_s - время перелета, сек; A_0 - ускорение, придаваемое КА силой притяжения к Солнцу на орбите Земли, м/сек²; α - ускорение, придаваемое КА силой давления света Солнца на орбите Земли, м/сек²; θ - угол установки солнечного паруса, управление, рад, измеряется от тангенциальной составляющей скорости космического аппарата, H - функция Понтрягина,

$\psi_U, \psi_V, \psi_R, \psi_\varphi$ - сопряженные переменные. Ограничения на угол установки солнечного паруса $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

На рис. 1 указан угол установки СП в локальной системе координат с базисом $\{V, U\}$. При таком выборе положительных направления скоростей отсчет углов идет по часовой стрелке. Выбор такого базиса сделан в соответствии с [2]. Знаки в системе ДУ соответствуют этому предпочтению. Краевые условия: $V_0, U_0 = 0, R_0, \varphi_0 = 0$ - значения составляющих орбитальной скорости Земли, радиус Земной орбиты и полярный угол в выбранной системе координат в начальный момент времени, $V_f, U_f = 0, R_f, \psi_{\varphi f} = 0$ (при $t = Ts$) - значения составляющих орбитальной скорости, радиуса орбиты Меркурия в момент окончания перелета и условие трансверсальности по сопряженной переменной ψ_φ .

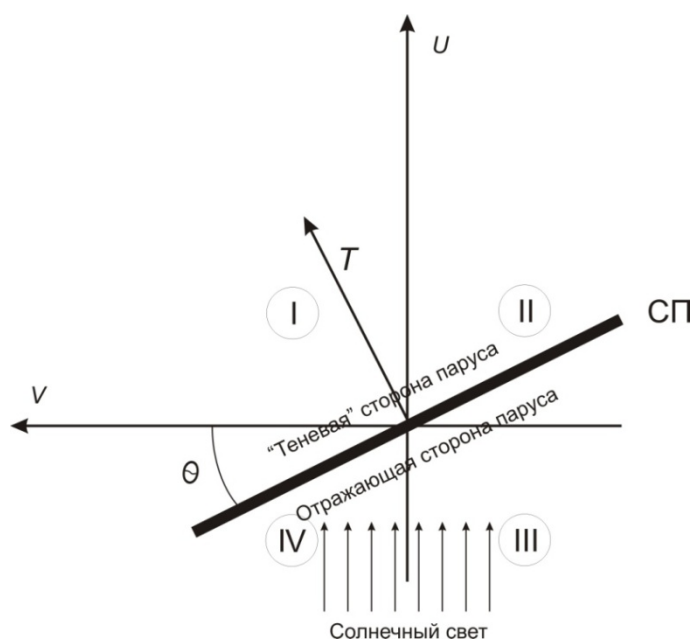


Рис.1. Угол установки СП в локальной системе координат с указанием четвертей полного круга. Авторская разработка.

$$\text{Из } \frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = \frac{3\psi_U \pm \sqrt{9\psi_U^2 + 8\psi_V^2}}{4\psi_V}; \cos \theta = 0.$$

Можно показать что максимума функция Понтрягина достигает при оптимальном угле установки

$$\theta^* = \arctg \left(\frac{3\psi_U - \sqrt{9\psi_U^2 + 8\psi_V^2}}{4\psi_V} \right).$$

Подставив значение оптимального угла установки СП в систему ДУ, получим краевую задачу, подлежащую решению.

Численные методы, реализованные в программном комплексе. Метод пристрелки включает в себя реализацию модифицированного метода Ньютона, метода численного интегрирования системы ОДУ – метод Рунге-Кутты четвертого порядка и метод решения СЛАУ LUP-разложением. Алгоритм был реализован на языке программирования C++. Для метода пристрелки выбранные параметры пристрелки: $\psi_U(0)$, $\psi_V(0)$, $\psi_R(0)$, T_s , невязки: $\delta_1 = U(T_s) \rightarrow 0$, $\delta_2 = (V(T_s) - V_f) / V_f \rightarrow 0$, $\delta_3 = (R(T_s) - R_f) / R_f \rightarrow 0$, $\delta_4 = H(T_s) \rightarrow 0$.

Результаты расчетов. В таблице 1 представлены полученные результаты при разных краевых условиях в конце межорбитального перелета.

Таблица 1. Результаты расчетов по разным краевым условиям в конце перелета.

Варианты	Скорость орбитальная V , км/сек	Расстояние от Солнца R , км	Время перелета t , сутки	Полярный угол траектории φ , рад
1. По средним параметрам круговой орбиты	47,36	$5,92 \times 10^7$	266,2	6,706
2. По точке перигелия орбиты Меркурия	58,97	$4,6 \times 10^7$	301,5	9,472
3. По точке афелия орбиты Меркурия	38,85	$6,982 \times 10^7$	273,2	7,162

Протекание физических параметров по времени существенно отличается во всех трех рассмотренных вариантах.

На рисунках 2-4 представлено изменение основных параметров процесса, таких как окружная скорость, тангенциальная скорость КА и расстояние от Солнца до КА. Тонкая сплошная линия относится к варианту 1, более толстая сплошная – к варианту 2, пунктирная линия к варианту 3. На рис.5 представлено изменения угла установки СП в оптимальном процессе для различных краевых условий в конце перелета.

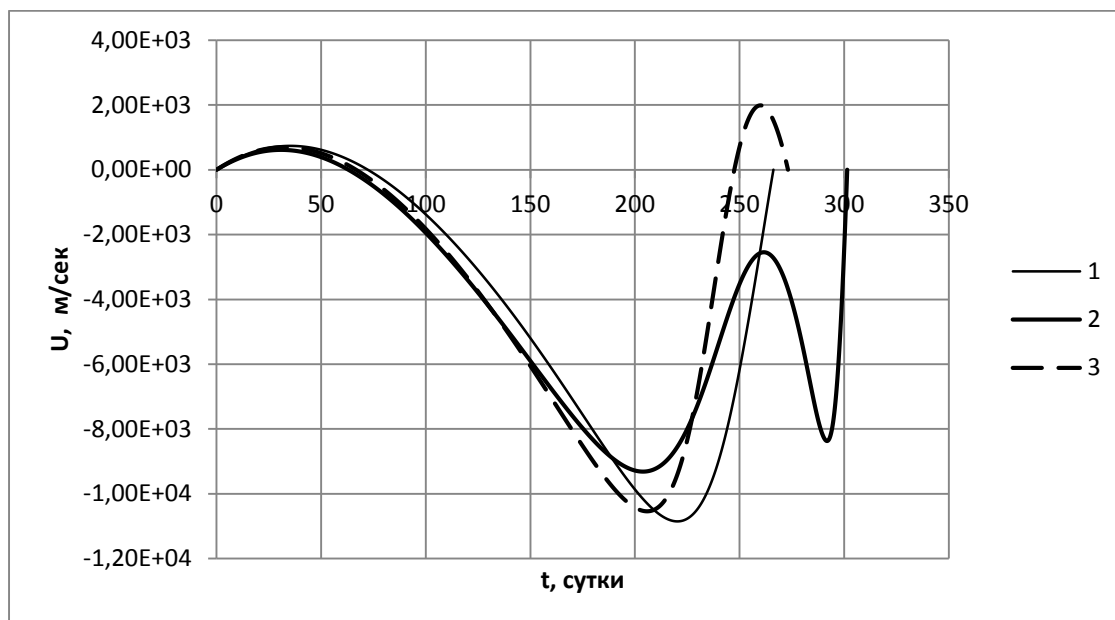


Рис.2. Изменение радиальной скорости в оптимальном процессе.

Авторская разработка.

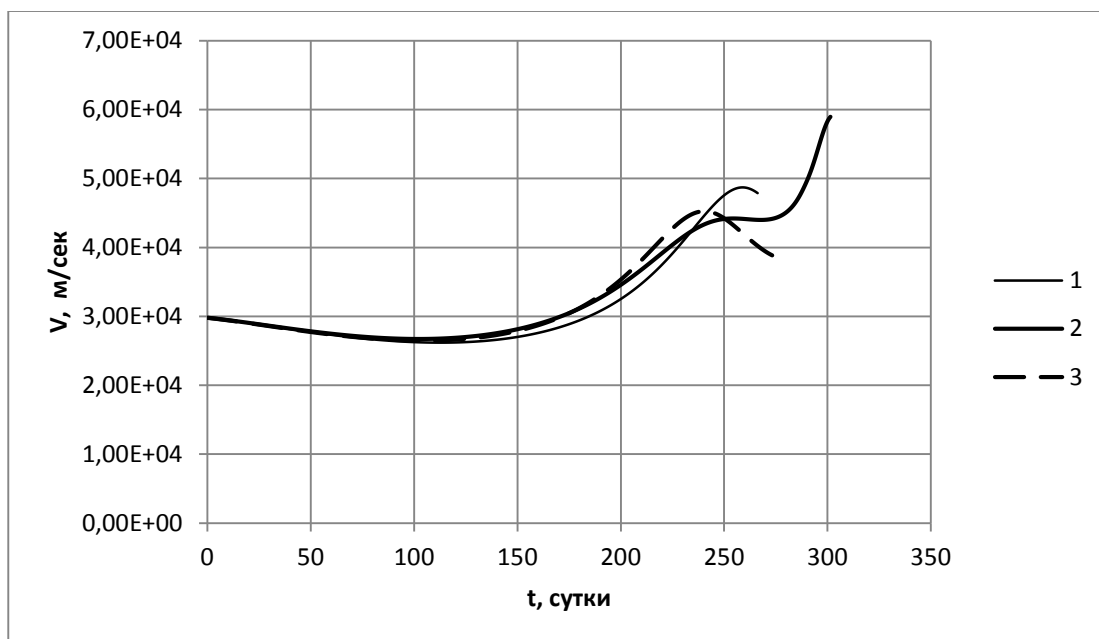


Рис.3. Изменение тангенциальной скорости в оптимальном процессе.

Авторская разработка.

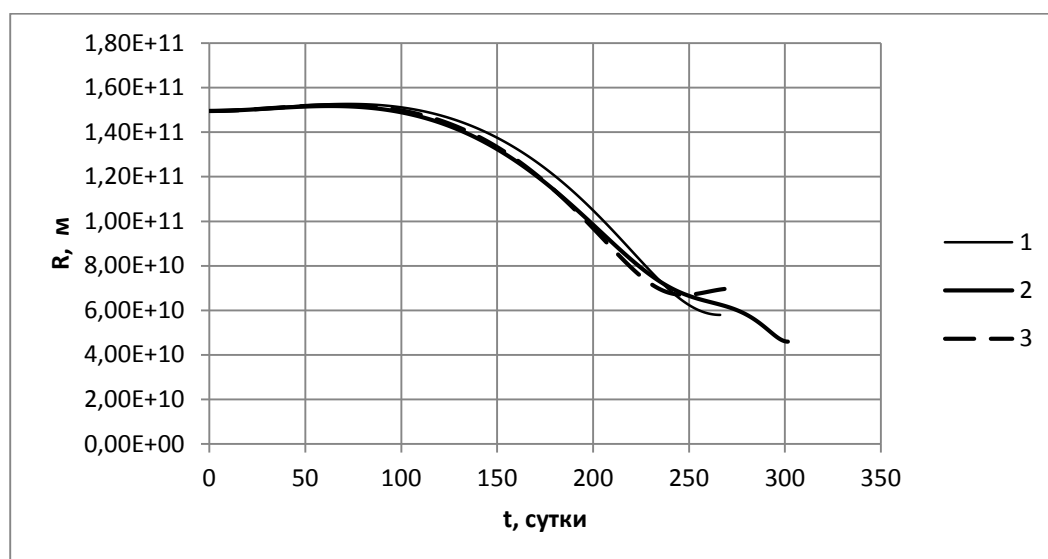


Рис.4. Изменение расстояния от КА до Солнца в оптимальном процессе.

Авторская разработка.

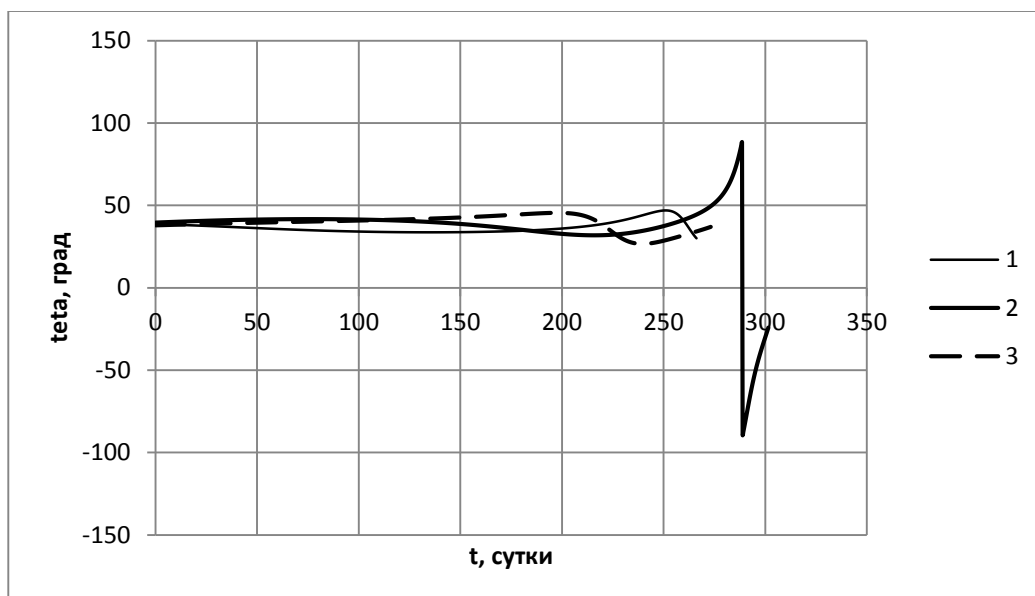


Рис. 5. Оптимальное управление, угол установки СП КА.

Авторская разработка.

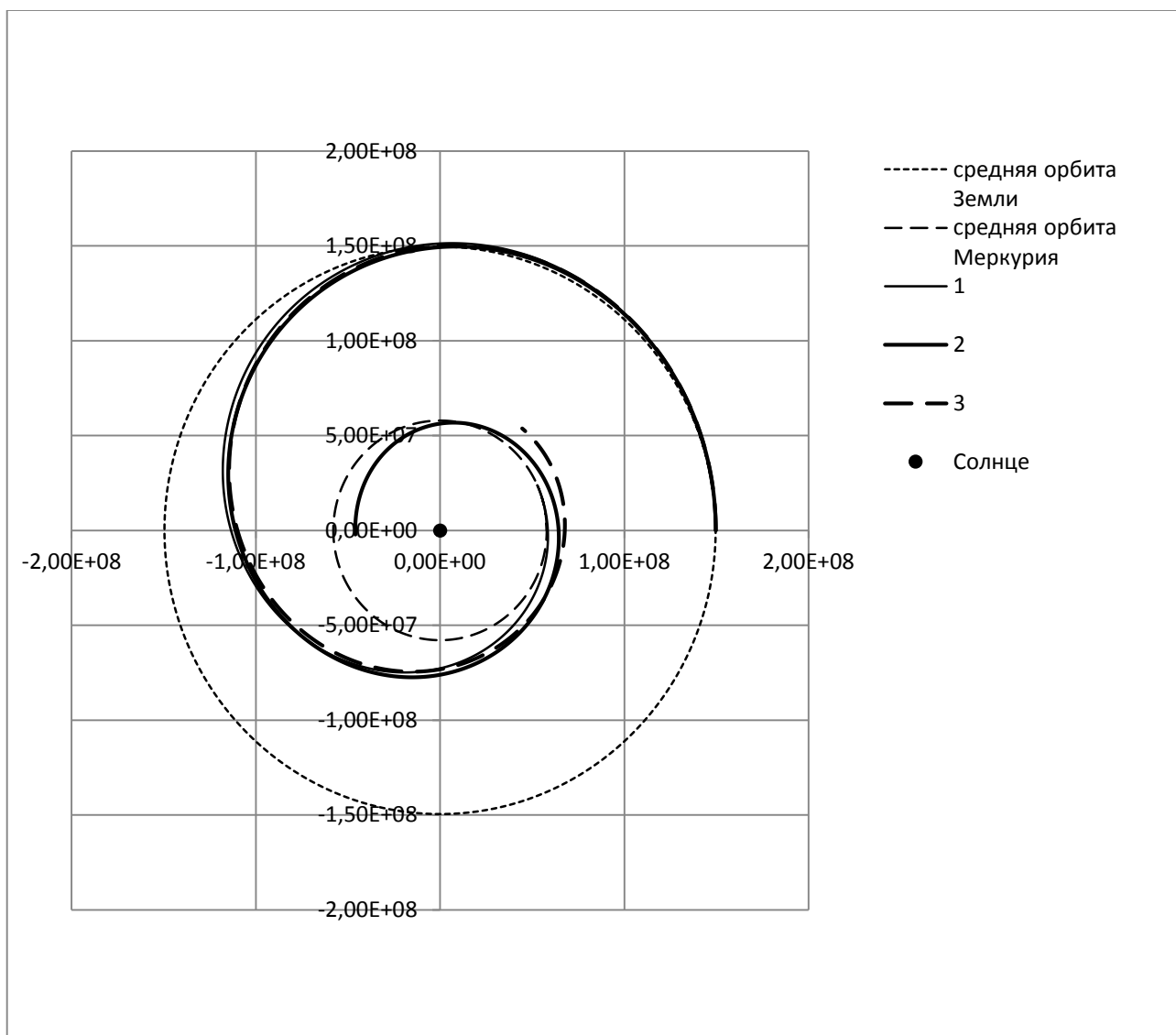


Рис. 6. Траектории движения КА в Солнечной системе в оптимальных процессах исследованных вариантов.

Авторская разработка.

Заключение. Проведенный численный эксперимент показал насколько различным должно быть оптимальное управление при выборе точки выхода на орбиту Меркурия. Расчет по средним значениям радиуса орбиты и орбитальной скорости оказывается непоказательным (см. рис. 2-6). Особенностью результатов расчета по данным для афелия является тот факт, что расстояние до точки афелия орбиты Меркурия в оптимальном процессе достигается дважды, первый раз примерно на 234 сутки. При этом остается еще достаточно большой

величина радиальной и тангенциальной скоростей (см. рис. 2, 3). Для расчета по данным перигелия следует отметить сложность достижения краевых условий, полет длится гораздо дольше, чем при достижении другой точки орбиты. Кроме того, угол установки СП в конце перелета резко меняет свое положение и переходит из первой четверти в четвертую, то есть с торможения тангенциальной скорости на ее разгон (см. рис 5).

Библиографический список.

1. Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. Механика космического полета с малой тягой.- : М. Наука, 1966, – 680 с.
2. Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета. – под ред. Дж. Лейтмана.- М.: Наука, 1965. – 538 с.
3. Мозжорина Т.Ю. Моделирование и оптимизация управлением спутника малой массы при перелете с орбиты Земли на орбиту Марса под солнечным парусом. / Т.Ю. Мозжорина, Д.А. Рахманкулов // Математическое моделирование и численные методы. – 2021. – № 3 (31). С. 74-87.
4. Мозжорина Т.Ю. Оптимизация управления космическим аппаратом при перелете с орбиты Земли на орбиту Венеры под солнечным парусом. / Т.Ю. Мозжорина, Е.А. Смирнов // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2023. № 11 С. 66-72 URL: <https://applied-research.ru/ru/article/view?id=13596>
5. Ишков С.А. Оптимизация и моделирование движения космического аппарата с солнечным парусом. / С.А. Ишков, О.Л. Старинова // Известия Самарского научного центра Российской академии наук, т.7, №1, 2005. С. 99-106.
6. Орлов А.А. Методика оптимизации траекторий межпланетных перелетов с гравитационными маневрами при использовании двигателей малой тяги. / А. А. Орлов // Космические исследования. – 2019. – Т. 57, № 5, С. 361-372.

7. Старинова О.Л. Оптимизация гелиоцентрического движения космического аппарата с солнечным парусом. / О.Л. Старинова, И.В. Горбунова. - Самара: Изд-во СНЦ РАН, 2015. С. 168-171.
8. Старинова О.Л. Расчет межпланетных перелетов космических аппаратов с малой тягой. / О.Л. Старинова. - Самара: Изд-во Самарский научный центр РАН, 2007. – 190 с.
9. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. – 486 с.
10. Хабибуллин Р.М., Анализ управляемого движения исследовательского космического аппарата с солнечным парусом. / Р.М. Хабибуллин, О.Л. Старинова // Известия Самарского научного центра Российской академии наук, № 12 (717), 2019. С. 94-103.
11. Caruso A. et al. Solar sail optimal control with solar irradiance fluctuations // Advances in space research. – 2021. – Т. 67. – №. 9. – С. 2776-2783.
12. Carzana L., Visser P., Heiligers J. Locally optimal control laws for Earth-bound solar sailing with atmospheric drag //Aerospace Science and Technology. – 2022. – Т. 127. – С. 107666.

Оригинальность 75%