

УДК: 514.16

***РАССЛОЕНИЯ, ПОРОЖДЕННЫЕ АЛГЕБРАМИ ТИПОВ IV_a И IV_b ПО
КЛАССИФИКАЦИИ ШТУДИ***

Тришин В. Н.

к. ф.-м.н., доцент,

*Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,
Москва, Россия*

Тришина Н. Е.

к. ф.-м.н., доцент,

*Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,
Российский химико-технологический университет им. Д. И. Менделеева,
Москва, Россия*

Аннотация.

В статье рассматриваются расслоения, которые определяются неприводимыми ассоциативными алгебрами типов IV_a и IV_b . Расслоения получаются при разбиении группы Ли обратимых элементов алгебры на левые смежные классы по ее подгруппам. С помощью этого метода найдены три тривиальных расслоения.

Ключевые слова: ассоциативная унитарная алгебра, главное расслоение, факторгруппа.

***BUNDLES GENERATED BY ALGEBRAS OF TYPES IV_a AND IV_b
ACCORDING TO STUDY'S CLASSIFICATION***

Trishin V. N.

*PhD, Associate Professor,
Bauman Moscow State Technical University,
Moscow, Russia*

Trishina N. E.

*PhD, Associate Professor,
Bauman Moscow State Technical University,
Mendeleev University of Chemical Technology of Russia,
Moscow, Russia*

Abstract.

This article considers bundles that are defined by irreducible associative algebras of types IV_a and IV_b. The bundles are obtained by partitioning the Lie group of invertible elements of the algebra into left cosets of its subgroups. Three trivial bundles are found using this method.

Keywords: associative unital algebra, principal bundle, quotient group.

Пусть $\mathfrak{A}$ — ассоциативная унитарная алгебра размерности n , $\tilde{\mathfrak{A}}$ — множество ее обратимых элементов. Это открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ и операции умножения и взятия обратного элемента являются гладкими функциями. Поэтому $\tilde{\mathfrak{A}}$ — группа Ли по умножению.

Пусть $\mathfrak{B}$ — унитарная подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$, $\tilde{\mathfrak{B}}$ — множество обратимых элементов $\mathfrak{B}$. $\tilde{\mathfrak{B}}$ — подгруппа группы $\tilde{\mathfrak{A}}$ по умножению и замкнутое подмножество, поэтому $\tilde{\mathfrak{B}}$ — подгруппа Ли.

Рассмотрим фактормножество $\tilde{\mathfrak{A}}/\tilde{\mathfrak{B}}$ правых смежных классов. Тогда

расслоение $(\tilde{\mathfrak{A}}, \pi, \tilde{\mathfrak{A}}/\tilde{\mathfrak{B}})$, где π — каноническая проекция, есть главное расслоение со структурной группой $\tilde{\mathfrak{B}}$ [15]. Доказано, что в случае, когда $\mathfrak{A}$ есть алгебра кватернионов, это главное расслоение изоморфно расслоению Хопфа [4], [5].

Исходя из такого подхода нами рассмотрены все алгебры размерностей 3 и 4 и получены расслоения этих алгебр над фактормножествами $\tilde{\mathfrak{A}}/\tilde{\mathfrak{B}}$ смежных классов. Большинство получающихся расслоений тривиально. Показано, что только в 12 случаях для алгебр размерности 4 и в одном случае для алгебр размерности 3 расслоения локально тривиальны, но не тривиальны. Приведем подробное описание расслоений для неприводимых алгебр типов IV_a и IV_b по классификации Штуди.

IV_a . Пусть $\mathfrak{A}$ коммутативная алгебра с таблицей умножения

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_3	0	0
e_2	e_2	0	e_3	0
e_3	e_3	0	0	0

Лемма 1 Алгебра $\mathfrak{A}$ содержит единственную 2-подалгебру с базисом $\{e_0, e_3\}$, изоморфную алгебре $\mathbb{R}(\varepsilon)$ дуальных чисел. Алгебра $\mathfrak{A}$ содержит пучок 3-подалгебр $\{e_0, ae_1 + be_2, e_3\}$, изоморфных алгебре $\mathbb{R}(\varepsilon^2)$ плюральных чисел.

Множество обратимых элементов алгебры $\mathfrak{A}$

$$\tilde{\mathfrak{A}} = \{x^0 + x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 | x^0 \neq 0, x^i \in \mathbb{R}\}$$

образует группу Ли, состоящую из двух связных компонент.

1. Рассмотрим 2-подалгебру $\mathbb{R}(e_3)$, изоморфную алгебре $\mathbb{R}(\varepsilon)$ дуальных чисел.

чисел, с базисом $\{1, e_3\}$. Множество ее обратимых элементов

$$\mathbb{R}(e_3) = \{a + be_3 \mid a \neq 0\}$$

есть подгруппа Ли и нормальный делитель группы $\tilde{\mathfrak{A}}$, 2-плоскость без прямой.

Рассмотрим фактормножество $\tilde{\mathfrak{A}}/\mathbb{R}(e_3)$. Оно является аддитивной группой и диффеоморфно 2-плоскости $\mathbb{R}^2$. Каноническая проекция

$$\pi: \tilde{\mathfrak{A}} \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$\pi(x^0 + x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3) = \left(\frac{x^1}{x^0}, \frac{x^2}{x^0}\right) \quad (1)$$

задает расслоение $(\tilde{\mathfrak{A}}, \pi, \mathbb{R}^2)$ с типовым слоем, диффеоморфным 2-плоскости без прямой. Справедлива

Теорема 1 *Расслоение $(\tilde{\mathfrak{A}}, \pi, \mathbb{R}^2)$, определяемое формулой (1), является главным тривиальным расслоением над аддитивной группой $\mathbb{R}^2$ с типовым слоем, диффеоморфным 2-плоскости без прямой. Следовательно, $\tilde{\mathfrak{A}}$ диффеоморфно произведению $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}(e_3)$.*

2. Рассмотрим 3-подалгебру $\mathbb{R}(e_1, e_3)$ с базисом $(1, e_1, e_3)$, изоморфную алгебре плюральных чисел. Множество ее обратимых элементов

$$\mathbb{R}(e_1, e_3) = \{a + be_1 + ce_3 \mid a \neq 0\}$$

есть подгруппа Ли и нормальный делитель группы $\mathfrak{A}$, 3-плоскость без 2-плоскости.

Рассмотрим фактормножество $\tilde{\mathfrak{A}}/\mathbb{R}(e_1, e_3)$. Оно является аддитивной группой и диффеоморфно прямой $\mathbb{R}$. Каноническая проекция

$$\pi: \tilde{\mathfrak{A}} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\pi(x^0 + x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3) = \frac{x^2}{x^0} \quad (2)$$

задает расслоение $(\tilde{\mathfrak{A}}, \pi, \mathbb{R})$. Справедлива

Теорема 2 *Расслоение $(\tilde{\mathfrak{A}}, \pi, \mathbb{R})$, определяемое формулой (2), является главным тривиальным расслоением над аддитивной группой $\mathbb{R}$ с типовым слоем, диффеоморфным 3-плоскости без 2-плоскости. Следовательно, $\tilde{\mathfrak{A}}$ диффеоморфно произведению $\mathbb{R} \times \mathbb{R}(e_1, e_3)$.*

IV_b. Пусть $\mathfrak{A}$ коммутативная алгебра с таблицей умножения

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_3	0	0
e_2	e_2	0	$-e_3$	0
e_3	e_3	0	0	0

Лемма 2 *Алгебра $\mathfrak{A}$ содержит два пучка 2-подалгебр $\{e_0, a(e_1 \pm e_2) + se_3\}$, изоморфных алгебре $\mathbb{R}(\varepsilon)$ плюральнх чисел. Алгебра $\mathfrak{A}$ имеет две подалгебры $\{e_0, e_1 \pm e_2, e_3\}$, изоморфные 3-алгебре типа III. Алгебра $\mathfrak{A}$ содержит пучок 3-подалгебр $\{e_0, ae_1 + be_2, e_3\}$, изоморфных алгебре $\mathbb{R}(\varepsilon^2)$ плюральнх чисел.*

Множество обратимых элементов алгебры $\mathfrak{A}$

$$\tilde{\mathfrak{A}} = \{x^0 + x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 \mid x^0 \neq 0, x^i \in \mathbb{R}\}$$

образует группу Ли, состоящую из двух связных компонент.

1. Рассмотрим 2-подалгебру $\mathbb{R}(e_3)$, изоморфную алгебре дуальных чисел с базисом $\{1, e_3\}$. Множество ее обратимых элементов

$$\mathbb{R}(e_3) = \{a + be_3 \mid a \neq 0\}$$

есть подгруппа Ли и нормальный делитель группы $\tilde{\mathfrak{A}}$, 2-плоскость без

прямой.

Рассмотрим фактормножество $\tilde{\mathfrak{A}}/\mathbb{R}(e_3)$. Оно является аддитивной группой и диффеоморфно 2-плоскости $\mathbb{R}^2$. Каноническая проекция

$$\pi: \tilde{\mathfrak{A}} \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$\pi(x^0 + x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3) = \left(\frac{x^1}{x^0}, \frac{x^2}{x^0} \right) \quad (3)$$

задает расслоение $(\tilde{\mathfrak{A}}, \pi, \mathbb{R}^2)$ с типовым слоем, диффеоморфным 2-плоскости без прямой. Справедлива

Теорема 3 *Расслоение $(\tilde{\mathfrak{A}}, \pi, \mathbb{R}^2)$, определяемое формулой (3) является главным тривиальным расслоением над аддитивной группой $\mathbb{R}^2$ с типовым слоем, диффеоморфным 2-плоскости без прямой. Следовательно, $\tilde{\mathfrak{A}}$ диффеоморфно произведению $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}(e_3)$.*

2. Рассмотрим 3-подалгебру $\mathbb{R}(e_1, e_3)$ с базисом $(1, e_1, e_3)$, изоморфную алгебре плюральнх чисел. Множество ее обратимых элементов

$$\mathbb{R}(e_1, e_3) = \{a + be_1 + ce_3 \mid a \neq 0\}$$

есть подгруппа Ли и нормальный делитель группы $\tilde{\mathfrak{A}}$, 3-плоскость без 2-плоскости.

Рассмотрим фактормножество $\tilde{\mathfrak{A}}/\mathbb{R}(e_1, e_3)$. Оно является аддитивной группой и диффеоморфно прямой $\mathbb{R}$. Каноническая проекция

$$\pi: \tilde{\mathfrak{A}} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\pi(x^0 + x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3) = \frac{x^2}{x^0} \quad (4)$$

задает расслоение $(\tilde{\mathfrak{A}}, \pi, \mathbb{R})$. Справедлива

Теорема 4 *Расслоение $(\tilde{\mathfrak{A}}, \pi, \mathbb{R})$, определяемое формулой (4), является главным тривиальным расслоением над аддитивной группой $\mathbb{R}$ с типовым слоем, диффеоморфным 3-плоскости без 2-плоскости. Следовательно, $\tilde{\mathfrak{A}}$*

диффеоморфно произведению $\mathbb{R} \times \mathbb{R}(e_1, e_3)$.

3. Рассмотрим подалгебру $\mathbb{R}(e_1 + e_2, e_3)$ с базисом $(1, e_1 + e_2, e_3)$, изоморфную алгебре типа III. Множество ее обратимых элементов

$$\mathbb{R}(e_1 + e_2, e_3) = \{a + b(e_1 + e_2) + ce_3 \mid a \neq 0\}$$

есть подгруппа Ли и нормальный делитель группы $\tilde{\mathfrak{A}}$, 3-плоскость без 2-плоскости.

Рассмотрим фактормножество $\tilde{\mathfrak{A}}/\mathbb{R}(e_1 + e_2, e_3)$. Оно является аддитивной группой и диффеоморфно прямой $\mathbb{R}$. Каноническая проекция

$$\pi: \tilde{\mathfrak{A}} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\pi(x^0 + x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3) = \frac{x^1 - x^2}{x^0} \quad (5)$$

задает расслоение $(\tilde{\mathfrak{A}}, \pi, \mathbb{R})$. Справедлива

Теорема 5 *Расслоение $(\tilde{\mathfrak{A}}, \pi, \mathbb{R})$, определяемое формулой (5), является главным тривиальным расслоением над аддитивной группой $\mathbb{R}$ с типовым слоем, диффеоморфным 3-плоскости без 2-плоскости. Следовательно, $\tilde{\mathfrak{A}}$ диффеоморфно произведению $\mathbb{R} \times \mathbb{R}(e_1 + e_2, e_3)$.*

Библиографический список

1. Вишневский В.В., Широков А.П., Шурыгин В.В. Пространства над алгебрами. Казань: изд. КГУ, 1985, 262 с.
2. Shirokov A.P. Spaces over Algebras and Their Applications// *Journal of Mathematical Sciences*. 2002. Vol. 108, issue 2. P. 232-248. DOI: 10.1023/A:1012896320320
3. Шапуков Б.Н. Расслоения неевклидова 3-пространства гиперболического типа, порожденные алгеброй антикватернионов. I // *Ученые записки казанского государственного университета*. Т. 147, кн. 1. 2005, С. Дневник науки | www.dnevniknauki.ru | СМИ ЭЛ № ФС 77-68405 ISSN 2541-8327

181-191.

4. Кэртис Ч., Райнер И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. - М.: Наука, 1969, 688 с.

5. Норден А.П. Пространства афинной связности. - М.: Наука, 1976, 432 с.

6. Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр IV. Дифференциальная геометрия. - М.: Наука, 1988, 496 с.

7. Тришина Н.Е., Тришин В.Н. Расслоения, определяемые ассоциативными унитарными алгебрами размерности 3 и 4.// *Инженерный вестник*. 2017, 11 С. 3.

8. Тришина Н.Е., Тришин В.Н. Расслоения, порожденные алгеброй третьего типа по классификации Штуди// *Дневник науки*. №11, 2024.

9. Kuzmina I., Mikes J. On pseudoconformal models of fibrations determined by algebra of antiquaternions and projectivization of them// *Annales mathematicae et informaticae*. 2013. no 42. P.57-64.

10. Rosefeld B. Geometry of Lie groups. Dordrecht/ Boston/ London: Kluwer academic publishers. 1997. 393 p.

11. Study E., Cartan E. Nombres complexes// *Encyclopedie des sciences mathematiques pures et appliquees*. 1908. t. 1. Vol. 1. 329–468.

Оригинальность 80%