

УДК: 514.8+537.8

ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ УРАВНЕНИЯ СПИНОРА КИЛЛИНГА ПРИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ КЕРРА-ШИЛДА

Тришин В. Н.

к. ф.-м.н., доцент,

*Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,
Москва, Россия*

Тришина Н. Е.

к. ф.-м.н., доцент,

*Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,
Российский химико-технологический университет им. Д. И. Менделеева,
Москва, Россия*

Аннотация.

В статье рассмотрена проблема инвариантности уравнения спинора Киллинга при преобразовании метрики типа Керра-Шилда. Получено условие, при котором спинор Киллинга удовлетворяет соответствующему уравнению после перехода от исходной метрики к метрике Керра-Шилда. Вывод основан на прямом использовании метода спиновых коэффициентов Ньюмена-Пенроуза.

Ключевые слова: преобразования Керра-Шилда, спиноры Киллинга, формализм Ньюмена-Пенроуза.

ON INVARIANCE OF THE KILLING SPINOR EQUATION UNDER KERR-SHIELD TRANSFORM

Trishin V. N.

PhD, Associate Professor,

*Bauman Moscow State Technical University,
Moscow, Russia*

Trishina N. E.

PhD, Associate Professor,

Bauman Moscow State Technical University,

Mendeleev University of Chemical Technology of Russia,

Moscow, Russia

Abstract.

In this paper we consider the problem of invariance of the Killing spinor equation under the transformation of a Kerr-Shield type metric. The condition under which the Killing spinor satisfies the corresponding equation after the transition from the original metric to the Kerr-Shield metric is obtained. The proof is based on the direct use of the Newman-Penrose method of spin coefficients.

Keywords: Kerr-Shield transform, Killing spinor, Newman-Penrose formalism.

1. Введение

В данной статье мы рассматриваем проблему инвариантности уравнений, задающих определённые геометрические объекты на многообразии с лоренцевой метрикой, при преобразованиях этой метрики, а именно, инвариантность уравнения спинора Киллинга

$$\nabla_{A'}(A\varphi_{BC}) = 0 \quad (1)$$

при преобразованиях Керра-Шилда. Спинор Киллинга φ_{AB} на многообразии M с лоренцевой метрикой $g_{\mu\nu}$ определяет [1,2] так называемые "скрытые симметрии" пространства-времени, не связанные с изометрией метрики. С физической точки зрения наличие у метрики спинора Киллинга влечёт существование дополнительных первых интегралов движения вдоль изотропных геодезических и к разделению переменных в различных уравнениях, как то уравнения Максвелла, Клейна-Гордона и т.д.

Преобразования метрики типа Керра-Шилда также хорошо известны в ОТО, поскольку многие физически интересные и важные точные решения

уравнений Эйнштейна [3,5], например метрика вращающейся чёрной дыры Керра, метрика плоской гравитационной волны и другие, принадлежат к классу метрик Керра-Шилда, которые могут быть получены из метрики плоского пространства-времени Минковского $\eta_{\mu\nu}$ с помощью преобразования Керра-Шилда:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 2Hl_\mu l_\nu, \quad (2)$$

где l^μ – некоторое изотропное векторное поле, $l_\mu l^\mu = 0$, а $H = H(x^\mu)$ – функция координат пространства-времени.

Целью данной работы является нахождение условий, при которых преобразования (2) оставляют инвариантным уравнение (1), то есть условий на функцию $H(x)$, при которых спинор φ_{AB} является спинором Киллинга как в исходной метрике $\eta_{\mu\nu}$, так и в преобразованной метрике $g_{\mu\nu}$. Для решения задачи используются прямые вычисления в формализме спиновых коэффициентов Ньюмена-Пенроуза, изложенного в [1,4].

2. Преобразования Керра-Шилда

Введём стандартную комплексную изотропную тетраду Ньюмена-Пенроуза $l^\mu, m^\mu, \bar{m}^\mu, n^\mu$ для метрики $g_{\mu\nu} = 2(l_{(\mu}n_{\nu)} - m_{(\mu}\bar{m}_{\nu)})$. Преобразование Керра-Шилда переводит метрику $g_{\mu\nu}$ (не обязательно плоскую) в метрику $\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + 2Hl_\mu l_\nu$, а вектора тетрады переходят в

$$\tilde{l}^\mu = l^\mu, \quad \tilde{m}^\mu = m^\mu, \quad \tilde{\bar{m}}^\mu = \bar{m}^\mu, \quad \tilde{n}^\mu = n^\mu - Hl^\mu, \quad (3)$$

так что $\tilde{g}_{\mu\nu} = 2(\tilde{l}_{(\mu}\tilde{n}_{\nu)} - \tilde{m}_{(\mu}\tilde{\bar{m}}_{\nu)})$.

Для производных по направлению тетрадных векторов получаем эквивалентные выражения:

$$\tilde{D} = D, \quad \tilde{\delta} = \delta, \quad \tilde{\bar{\delta}} = \bar{\delta}, \quad \tilde{\Delta} = \Delta - HD. \quad (4)$$

Вычисляя коммутаторы производных $[\tilde{D}, \tilde{\Delta}]$, $[\tilde{D}, \tilde{\delta}]$, $[\tilde{\Delta}, \tilde{\delta}]$ и $[\tilde{\delta}, \tilde{\bar{\delta}}]$, найдём выражения для спиновых коэффициентов новой тетрады через коэффициенты исходной. Например, с одной стороны коммутатор $[\tilde{D}, \tilde{\Delta}]$ должен [4] быть равен

$$[\tilde{D}, \tilde{\Delta}] = -(\tilde{\gamma} + \tilde{\bar{\gamma}})\tilde{D} + (\tilde{\tau} + \tilde{\pi})\tilde{\delta} + (\tilde{\tau} + \tilde{\bar{\pi}})\tilde{\bar{\delta}} - (\tilde{\varepsilon} + \tilde{\bar{\varepsilon}})\tilde{\Delta}$$

С другой стороны, подставляя выражения для производных (4) и используя выражение для коммутатора через спинорные коэффициенты в исходной тетраде, получим:

$$\begin{aligned} [\tilde{D}, \tilde{\Delta}] &= [D, \Delta - HD] = [D, \Delta] - (DH)D = \\ &= -(\gamma + \bar{\gamma} + DH)D + (\bar{\tau} + \pi)\delta + (\tau + \bar{\pi})\bar{\delta} - (\varepsilon + \bar{\varepsilon})\Delta = \\ &= -(\gamma + \bar{\gamma} + DH + (\varepsilon + \bar{\varepsilon})H)\tilde{D} + (\bar{\tau} + \pi)\tilde{\delta} + (\tau + \bar{\pi})\tilde{\bar{\delta}} - (\varepsilon + \bar{\varepsilon})\tilde{\Delta}. \end{aligned}$$

Таким образом, приравнявая коэффициенты при производных, получим следующие выражения для спинорных коэффициентов после преобразования Керра-Шилда:

$$\tilde{\kappa} = \kappa \quad (5)$$

$$\tilde{\sigma} = \sigma \quad (6)$$

$$\tilde{\rho} = \rho \quad (7)$$

$$\tilde{\tau} = \tau \quad (8)$$

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon \quad (9)$$

$$\tilde{\beta} = \beta + \kappa H/2 \quad (10)$$

$$\tilde{\alpha} = \alpha + \bar{\kappa} H/2 \quad (11)$$

$$\tilde{\gamma} = \gamma + (D + 2\bar{\varepsilon} + \rho - \bar{\rho})H/2 \quad (12)$$

$$\tilde{\pi} = \pi \quad (13)$$

$$\tilde{\mu} = \mu + \rho H \quad (14)$$

$$\tilde{\lambda} = \lambda + \bar{\sigma} H \quad (15)$$

$$\tilde{\nu} = \nu + (\bar{\delta} + 2(\alpha + \bar{\beta}) - \pi - \bar{\tau})H + \bar{\kappa} H^2 \quad (16)$$

3. Спинор Киллинга

Запишем уравнение спинора Киллинга (1) в компонентах относительно тетрады $l^\mu, m^\mu, \bar{m}^\mu, n^\mu$. Для этого, чтобы сократить запись, выберем вектора тетрады $l^\mu = o^A o^{A'}$ и $n^\mu = \iota^A \iota^{A'}$ вдоль главных изотропных направлений (ГИН) спинора Киллинга, то есть примем $\varphi_{AB} = \varphi o_{(A} \iota_{B)}$, где спиноры o^A и ι^A

образуют нормированную ($o_A \iota^A = 1$) спинорную диаду (спиновую систему отсчета), ассоциированную с выбранной комплексной изотропной тетрадой. Тогда уравнения (1) дают четыре условия на спиновые коэффициенты тетрады:

$$\kappa = 0, \quad \sigma = 0, \quad \nu = 0, \quad \lambda = 0 \quad (17)$$

и четыре уравнения для неизвестной компоненты φ спинора Киллинга φ_{AB} :

$$D\varphi = -\rho\varphi, \quad \delta\varphi = -\tau\varphi, \quad \bar{\delta}\varphi = \pi\varphi, \quad \Delta\varphi = \mu\varphi. \quad (18)$$

Для вычисления компонент спинора Киллинга в новой тетраде после преобразования метрики введем антисимметричный конформный тензор Киллинга-Яно

$$Q_{\mu\nu} = \varphi_{AB} \varepsilon_{A'B'} + \bar{\varphi}_{A'B'} \varepsilon_{AB}, \quad (19)$$

являющийся тензорным представлением спинора Киллинга.

Тогда после преобразования Керра-Шилда в новой тетраде (3) спинор Киллинга будет иметь следующие компоненты:

$$\tilde{\varphi}_{00} = Q_{\mu\nu} \tilde{l}^\mu \tilde{m}^\nu = Q_{\mu\nu} l^\mu m^\nu = \varphi_{00} \quad (20)$$

$$\tilde{\varphi}_{01} = \frac{1}{2} Q_{\mu\nu} (\tilde{l}^\mu \tilde{n}^\nu + \tilde{m}^\mu \tilde{\bar{m}}^\nu) = \frac{1}{2} Q_{\mu\nu} (l^\mu n^\nu + m^\mu \bar{m}^\nu) = \varphi_{01} \quad (21)$$

$$\tilde{\varphi}_{11} = Q_{\mu\nu} \tilde{\bar{m}}^\mu \tilde{n}^\nu = Q_{\mu\nu} \bar{m}^\mu n^\nu - H Q_{\mu\nu} \bar{m}^\mu l^\nu = \varphi_{11} + H \bar{\varphi}_{00}. \quad (22)$$

Поскольку мы выбрали вектора исходной тетрады вдоль ГИН спинора Киллинга, то $\varphi_{00} = 0$, $\varphi_{01} = -\frac{1}{2}\varphi$, $\varphi_{11} = 0$. Поэтому в новой тетраде спинор имеет те же компоненты:

$$\tilde{\varphi}_{00} = 0, \quad \tilde{\varphi}_{01} = -\frac{1}{2}\varphi, \quad \tilde{\varphi}_{11} = 0. \quad (23)$$

Тогда уравнение Киллинга (1) в новой тетраде (3) даёт условия на спиновые коэффициенты тетрады (3):

$$\tilde{\kappa} = 0, \quad \tilde{\sigma} = 0, \quad \tilde{\nu} = 0, \quad \tilde{\lambda} = 0 \quad (24)$$

и уравнения для компоненты φ

$$\tilde{D}\varphi = -\tilde{\rho}\varphi, \quad \tilde{\delta}\varphi = -\tilde{\tau}\varphi, \quad \tilde{\bar{\delta}}\varphi = \tilde{\pi}\varphi, \quad \tilde{\Delta}\varphi = \tilde{\mu}\varphi. \quad (25)$$

Принимая во внимание связь (4) между производными по направлению

тетрадных векторов и соотношения (5-16) между спинными коэффициентами, мы получаем, что все четыре уравнения (25) выполняются тождественно в силу соотношений (18), и только условия (24) дают единственное нетривиальное дифференциальное уравнение первого порядка для функции H :

$$\delta H = (\pi + \bar{\tau} - 2\alpha - 2\bar{\beta})H. \quad (26)$$

Таким образом, доказано следующее

Утверждение:

Если спинор φ_{AB} удовлетворяет уравнению Киллинга $\nabla_{A'(A}\varphi_{BC)} = 0$ в метрике $g_{\mu\nu}$, то он удовлетворяет этому уравнению и в метрике $\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + 2Hl_\mu l_\nu$, $l_\mu l^\mu = 0$ тогда, и только тогда, когда функция $H(x)$ является решением дифференциального уравнения $\delta H = (\pi + \bar{\tau} - 2\alpha - 2\bar{\beta})H$.

Библиографический список

1. Пенроуз Р., Риндлер В. Спиноры и пространство-время. В 2 т. Т.1. Два-спинорное исчисление и релятивистские поля: пер. с англ. М.: Мир, 1987. 528 с
2. Пенроуз Р., Риндлер В. Спиноры и пространство-время. В 2 т. Т.2. Спинорные и твисторные методы в геометрии пространства-времени: пер. с англ. М.: Мир, 1988. 572 с
3. Точные решения уравнений Эйнштейна. Шмутцер Э., ред. Москва, Энергоиздат, 1980, 416 с.
4. Фролов В. П. Метод Ньюмана-Пенроуза в общей теории относительности. Труды ФИАН СССР. Т.96. М.:Наука, 1977, с.72
5. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. В 3 т. Т.2. пер. с англ. М.: Мир, 1977. 525 с

Оригинальность 80%