

УДК: 514.8+537.8

ФОРМЫ КИЛЛИНГА В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Тришин В. Н.

к. ф.-м.н., доцент,

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,

Москва, Россия

Аннотация.

В статье рассматриваются решения уравнений Максвелла, генерируемые векторными полями Киллинга в вакуумном пространстве-времени общей теории относительности. Цель статьи заключается в представлении нового простого доказательства известного факта, что поле Киллинга в пространстве Эйнштейна является векторным потенциалом для электромагнитного поля (формы Киллинга), удовлетворяющего уравнениям Максвелла без источников. Ведущим подходом к исследованию данной проблемы является формализм двухкомпонентных спиноров Пенроуза, который позволяет существенно упростить решение задачи. Материалы данной методической статьи могут быть полезными студентам и аспирантам, изучающим общую теорию относительности.

Ключевые слова: вектор Киллинга, форма Киллинга, поле Папапетру.

KILLING FORMS IN GENERAL RELATIVITY THEORY

Trishin V. N.

PhD, Associate Professor,

Bauman Moscow State Technical University,

Moscow, Russia

Abstract.

The paper deals with solutions of Maxwell's equations generated by vector Killing fields in the vacuum space-time of general relativity theory. The aim of the article is to present a new simple proof of the known fact that the Killing field in Einstein space is a vector potential for the electromagnetic field (Killing form) satisfying Maxwell's equations without sources. The leading approach to the study of this problem is the formalism of two-component Penrose spinors, which allows us to simplify the solution of the problem considerably. The materials of this methodological paper can be useful for undergraduate and graduate students studying the general relativity theory.

Keywords: Killing vector, Killing form, Papapetrou field.

Введение

При решении задач общей теории относительности (ОТО) наличие локальных симметрий у метрики пространства-времени играет особенно важную роль. В частности, известные симметрии позволяют найти точное решение уравнений Эйнштейна, или набор сохраняющихся величин [1,2,3,6]. В данной методической заметке мы рассматриваем другой аспект этой задачи, а именно применение локальных симметрий для построения точных решений уравнений Максвелла на фоне искривленной метрики пространства-времени ОТО.

Рассмотрим четырёхмерное многообразие M с лоренцевой метрикой $g_{\mu\nu}$. Пусть метрика пространства - времени допускает локальную конформную симметрию, которая характеризуется конформным векторным полем Киллинга K^μ , удовлетворяющем конформному уравнению Киллинга

$$\nabla_{(\mu} K_{\nu)} = f g_{\mu\nu}, \quad f = \frac{1}{4} \nabla_\alpha K^\alpha, \quad (1)$$

где символ ∇_μ означает ковариантную производную со связностью Леви-Чивита, а круглые скобки обозначают симметризацию $\nabla_{(\mu} K_{\nu)} = \frac{1}{2} (\nabla_\mu K_\nu + \nabla_\nu K_\mu)$.

Нетривиальные решения этого уравнения являются генераторами инфинитезимальных конформных движений пространства-времени, то есть при переносе метрики вдоль поля K^μ она лишь приобретает дополнительный множитель:

$$\mathfrak{L}_K g_{\mu\nu} = 2f g_{\mu\nu}, \quad (2)$$

здесь $\mathfrak{L}_K g_{\mu\nu}$ – производная Ли метрики вдоль конформного вектора Киллинга.

Если $f = \frac{1}{4} \nabla_\alpha K^\alpha = 0$, то вектор K^μ называют вектором Киллинга. Он удовлетворяет уравнению $\nabla_{(\mu} K_{\nu)} = 0$ и описывает локальные изометрии метрики $\mathfrak{L}_K g_{\mu\nu} = 0$.

Формой Киллинга, так же используется термин поле Папаетру, называется антисимметричный тензор $F_{\mu\nu}$, для которого конформный вектор Киллинга является потенциалом:

$$F_{\mu\nu} = \nabla_{[\mu} K_{\nu]} = \frac{1}{2} (\nabla_\mu K_\nu - \nabla_\nu K_\mu). \quad (3)$$

Поскольку K^μ удовлетворяет уравнению (1), то форму Киллинга можно записать в эквивалентной форме

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu K_\nu - f g_{\mu\nu}. \quad (4)$$

Хорошо известно [2,7], что если вектор K^μ является вектором Киллинга, то дивергенция формы Киллинга $\nabla^\mu F_{\mu\nu} = R_\nu{}^\mu K_\mu$, где $R_{\mu\nu}$ – тензор Риччи метрики $g_{\mu\nu}$. Следовательно, в вакуумном пространстве-времени с $R_{\mu\nu} = 0$ вектор Киллинга K^μ является векторным потенциалом для пробного электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$, которое в этом случае будет удовлетворять уравнениям Максвелла без источников $\nabla^\mu F_{\mu\nu} = 0$.

В имеющейся литературе доказательство этого утверждения использует тензорную запись всех величин. В данной статье мы приводим альтернативное простое доказательство, основанное на использовании двухкомпонентных спиноров, а также обобщаем этот результат на случай конформных векторов Киллинга. Предполагается знакомство читателя со спинорным анализом и

стандартным формализмом абстрактных индексов, который изложен в [3,4,5].

Форма Киллинга

Пусть конформный вектор Киллинга K^μ имеет спинорное представление $K^{AA'}$, то есть, используя абстрактные индексы, запишем $K^\mu = K^{AA'}$. Конформное уравнение Киллинга (1) в спинорной форме имеет простой вид

$$\nabla_{(A}^{(A'} K_{B)}^{B')} = 0. \quad (5)$$

Для формы Киллинга получим следующее спинорное представление:

$$F_{\mu\nu} = \varphi_{AB} \varepsilon_{A'B'} + \bar{\varphi}_{A'B'} \varepsilon_{AB} \quad (6)$$

где

$$\varphi_{AB} = \frac{1}{2} \nabla_{C'(A} K_{B)}^{C'}, \quad \bar{\varphi}_{A'B'} = \frac{1}{2} \nabla_{C(A'} K_{B')}^C, \quad (7)$$

и дивергенция $\nabla^\mu F_{\mu\nu}$ принимает вид

$$\nabla^\mu F_{\mu\nu} = \nabla^{CC'} \varphi_{CA} \varepsilon_{C'A'} + \nabla^{CC'} \bar{\varphi}_{C'A'} \varepsilon_{CA} = \nabla_{A'}^C \varphi_{CA} + \nabla_A^{C'} \bar{\varphi}_{C'A'} \quad (8)$$

Поскольку вектор K^μ является потенциалом для $F_{\mu\nu}$, а значит выполняются условия (7), то в силу тождества $\nabla_{A'}^C \nabla_{(A}^{C'} K_{C)}^{C'} \equiv \nabla_A^{C'} \nabla_{(A'}^C K_{C')}^C$ получим, что $\nabla_{A'}^C \varphi_{CA} = \nabla_A^{C'} \bar{\varphi}_{C'A'}$, а следовательно

$$\nabla^\mu F_{\mu\nu} = 2 \nabla_{A'}^C \varphi_{CA} = \nabla_{A'}^C \nabla_{C'(C} K_A)^{C'}. \quad (9)$$

Используя конформное уравнение Киллинга из формулы (4) получим

$$\nabla^\mu F_{\mu\nu} = \nabla^\mu \nabla_\mu K_\nu - \nabla_\nu f. \quad (10)$$

Раскладывая правую часть выражения (9) на неприводимые части и используя спинорное представление для коммутатора ковариантных производных [3]:

$$\nabla_{(A'}^C \nabla_{C')C} K_B^{B'} = -\Phi_{A'C'BD} K^{DB'} - \Psi_{ACBD} K^{DB'} + \Lambda(\varepsilon_{AB} K_C^{B'} + \varepsilon_{CB} K_A^{B'}) \quad (11)$$

получим после объединения с выражением (10)

$$\nabla^\mu F_{\mu\nu} = 2\Phi_{ACA'}^{C'} K_{C'}^C - 3(\nabla_{AA'} f - 2\Lambda K_{AA'}), \quad (12)$$

где $\Phi_{ACA'}^{C'}$ – спинор Риччи, а $R = \Lambda/24$ – скалярная кривизна метрики. Формула (11) соответствует тензорной записи

$$\nabla^\mu F_{\mu\nu} = R_\nu{}^\mu K_\mu - 3\nabla_\nu f, \quad (13)$$

где использована спинорная запись тензора Риччи $R_{\mu\nu} = 6\Lambda g_{\mu\nu} - 2\Phi_{ABA'B'}$.

Таким образом мы получили, что конформный вектор Киллинга будет потенциалом пробного поля Максвелла в вакуумном пространстве-времени, если он является вектором Киллинга, то есть $\nabla_{(\mu} K_{\nu)} = 0$ или задаёт гомотетии метрики, то есть $\nabla_\nu f = 0$.

Библиографический список

1. Точные решения уравнений Эйнштейна. Шмутцер Э., ред. Москва, Энергоиздат, 1980, 416 с.
2. Wald R.M. General relativity. - The University of Chicago Press, 1984. - 491p.
3. Пенроуз Р., Риндлер В. Спиноры и пространство-время. В 2 т. Т.1. Два-спинорное исчисление и релятивистские поля: пер. с англ. М.: Мир, 1987. 528 с
4. Пенроуз Р., Риндлер В. Спиноры и пространство-время. В 2 т. Т.2. Спинорные и твисторные методы в геометрии пространства-времени: пер. с англ. М.: Мир, 1988. 572 с
5. Фролов В. П. Метод Ньюмана-Пенроуза в общей теории относительности. Труды ФИАН СССР. Т.96. М.:Наука, 1977, с.72
6. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. В 3 т. Т.2. пер. с англ. М.: Мир, 1977. 525 с
7. Лайтман А., Пресс В., Прайс Р., Тюкольски С. Сборник задач по теории относительности и гравитации. пер. с англ. - М.: Мир, 1979. - 535 с.

Оригинальность 79%