УДК 656.2:517.9: 656.072.3

ВАРИАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПАССАЖИРОПОТОКОВ В ПРИГОРОДНОМ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОМ СООБЩЕНИИ

Язареева Д.Р.

Студент,

Российский университет транспорта,

Москва, Россия

Шмаль В.Н.

к.т.н., доцент,

Российский университет транспорта,

Москва, Россия

Аннотация

В статье рассматривается вариационная модель распределения пассажиропотоков в железнодорожном сообщении, направленная на оптимизацию транспортных потоков и повышение эффективности работы железнодорожного транспорта. Предложенная модель учитывает пространственно-временную динамику спроса и пропускную способность инфраструктуры. Приведена постановка задачи в вариационной форме, а также вывод уравнений Эйлера–Лагранжа. На основе вариационного исчисления получена формула для оптимального распределения нагрузки на каждом маршруте в каждый момент времени. Представлен численный пример, применения модели с интерпретацией результатов для оптимизации пригородных перевозок.

Ключевые слова: распределение пассажиропотоков, вариационная модель, пригородное железнодорожное сообщение, оптимизация, транспортное планирование.

VARIATION MODEL OF PASSENGER TRAFFIC DISTRIBUTION IN SUBURBAN RAILWAY SERVICE

Yazareeva D.R.
Student,
Institute of Management and Information Technologies
Russian University of Transport (MIIT),
Moscow, Russia
Shmal V.N.
PhD, Associate Professor of the Department of Operational Management and Safety in Transport,
Russian University of Transport (MIIT),
Moscow, Russia

Abstract
The article considers a variational model of passenger traffic distribution in railway traffic aimed at optimizing traffic flows and improving the efficiency of railway transport. The proposed model takes into account spatial and temporal dynamics of demand and infrastructure capacity. The formulation of the problem in variational form and the derivation of the Euler–Lagrange equations are given. On the basis of calculus of variations, a formula for the optimal load distribution on each route at each moment of time is obtained. A numerical example of the application of the model with interpretation of the results for suburban transport optimization is presented.
Key words: passenger flow distribution, variational model, suburban railway service, optimization, transport planning.

Введение

Эффективная организация пассажирских перевозок на железнодорожном транспорте является одной из ключевых задач транспортной отрасли.

Пригородные пассажиропотоки занимают особое место, поскольку именно на них приходится до 90% общего объёма перевозок железнодорожным транспортом [1]. Данный вид перевозок имеет большое социально-экономическое значение: анализ реальных данных свидетельствует, что сокращение пригородного сообщения (например, отмена значительного числа пригородных маршрутов в регионах) оборачивается серьёзными социальными и экономическими проблемами для населения и регионов [2]. С одной стороны, растущая урбанизация и маятниковая миграция (ежедневные поездки из пригородов в городские центры и обратно) требуют увеличения провозной способности и повышения качества транспортного обслуживания. С другой стороны, ограниченность ресурсов на содержание инфраструктуры и подвижного состава обуславливает необходимость сбалансированного подхода между максимальным удовлетворением спроса и оптимизацией затрат на перевозки.

Для принятия обоснованных решений в сфере пассажирских перевозок широко применяются математическое и имитационное моделирование [3]. Модели позволяют оценивать различные варианты развития транспортных систем без проведения дорогостоящих натурных экспериментов, служат инструментом анализа «узких мест» и выработки мероприятий по улучшению работы транспорта [4]. В частности, для пригородного железнодорожного сообщения разрабатываются имитационные модели на основе матриц корреспонденций и теории массового обслуживания [5], эконометрические модели прогноза пассажиропотока [6], а также методы оптимизации расписаний и тарифов [7]. Тем не менее, во многих случаях полезен аналитический подход, позволяющий получить явное решение задачи распределения пассажиропотоков при заданных критериях оптимальности. В данной работе предлагается вариационная модель, основанная на принципах вариационного исчисления [8], для распределения пассажиропотоков во времени на пригородном железнодорожном транспорте. Вариационный подход позволяет сформулировать задачу в виде минимизации функционала, учитывающего сразу несколько факторов – интенсивность потоков и отклонение от желаемого (прогнозного) уровня – и получить оптимальное распределение потоков из условия минимума этого функционала. Такой подход обеспечивает строгую постановку задачи и возможность аналитического решения, что особенно ценно при планировании перевозок и анализе чувствительности решения к параметрам модели [9].

Далее приведены постановка задачи в вариационной форме, вывод уравнений Эйлера–Лагранжа [10] и получение оптимального решения, численный пример, иллюстрирующий применение модели, интерпретация результатов с точки зрения практической организации пригородных перевозок, а также заключение о преимуществах вариационного подхода.

Постановка задачи

Рассмотрим ограниченную во времени транспортную систему пригородного железнодорожного сообщения на отрезке времени $[t_0, t_1]$ (например, в пределах суток или часа пик). Пусть имеется множество маршрутов или направлений $j = 1,2,\ldots,N$ (линий пригородного сообщения, отдельных поездов или групп поездов), по которым распределяется общий пассажиропоток. Введём функцию пассажиропотока $f_j(t)$ – мгновенную интенсивность (или скорость) перевозки пассажиров по маршруту j в момент времени t. По сути, $f_j(t)$ характеризует количество пассажиров, перевозимых по направлению j в единицу времени t (например, пассажиров в час в момент времени t).

Для каждого маршрута j задана функция прогнозной или желательной интенсивности пассажиропотока, обозначаемая как $f_j^*(t)$. Здесь символ «звёздочка» в верхнем индексе указывает на то, что рассматривается не фактический, а целевой, плановый поток, к которому следует стремиться при организации перевозок. Функция $f_j^*(t)$ описывает ожидаемый спрос пассажиров в зависимости от времени и формируется на основе статистических наблюдений, методов экстраполяции, либо экспертных оценок. Задача планирования заключается в определении реализуемых функций фактических потоков $f_j(t)$, приближающихся к значениям $f_j^*(t)$ с учётом ограниченности ресурсов, технических условий и экономических издержек. При этом цель состоит в минимизации интегральной меры отклонения между фактическими и прогнозными значениями потока, что позволяет согласовать транспортное предложение с динамикой пассажирского спроса.

Формализуем критерий оптимальности в виде функционала, заданного на множестве функций $f_j(t)$. Введём целевой функционал в следующем виде:

$$J[f_1(\cdot), \dots, f_N(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_1} L(f_1(t), \dots, f_N(t), t)dt \to min.$$

где $L(f_1, \dots, f_N; t)$ – заданная функция Лагранжа, зависящая от значений пассажиропотоков в момент времени t.

Выбор функции Лагранжа определяет структуру оптимизационной задачи. В данном исследовании предлагается следующая квадратичная форма Лагранжиана:

$$L(f_1, \dots, f_N; t) = \sum_{j=1}^{N} [\alpha_j f_j^2(t) + \beta_j (f_j(t) - f_j^*(t))^2],$$

где α_j и β_j – неотрицательные весовые коэффициенты для каждого маршрута j, отражающие относительную важность соответствующих составляющих.

Первый член $\alpha_j f_j^2(t)$ характеризует условные «затраты» или неудобства, связанные с поддержанием пассажиропотока $f_j(t)$ по маршруту j. Этот член возрастает квадратично при увеличении $f_j(t)$, что моделирует возрастающие предельные издержки, например:

- необходимость задействования дополнительных поездов, вагонов, персонала;
- рост переменных затрат и износа при повышении интенсивности перевозок.

Квадратичная зависимость обеспечивает строго выпуклый характер функционала по $f_j(t)$ и тем самым единственность решения задачи минимума.

Второй член $\beta_j(f_j(t) - f_j^*(t))^2$ отражает отклонение фактического пассажиропотока от желательного уровня. Если $f_j(t)$ меньше прогнозного спроса $f_j^*(t)$, этот член означает ущерб от не полностью удовлетворённого спроса (пассажиры не смогли уехать, уровень обслуживания снизился). Если же $f_j(t)$ превышает $f_j^*(t)$, то возникает избыточная провозная способность, что также неэффективно. Следовательно, слагаемое с коэффициентом β_j штрафует любые отклонения $f_j(t)$ от целевой функции $f_j^*(t)$, побуждая систему работать вблизи прогнозного спроса. Коэффициенты β_j задают степень важности удовлетворения спроса на каждом маршруте: чем больше β_j, тем сильнее система стремится следовать функции $f_j^*(t)$.

Таким образом, функционал J складывается из интегральной суммарной «стоимости» поддержания потоков $f_j(t)$ по всем направлениям с учётом отклонений от плановых величин. Задача заключается в выборе функций $f_j(t)$, $j = 1, \dots, N$, которые минимизируют J на отрезке $[t_0, t_1]$. Формально: найти $f_j(t)$ (оптимальные функции, здесь для удобства обозначим оптимальные решения без звёздочки, чтобы отличать от заданных $f_j^*(t)$ как входных данных) такие, что для любых других допустимых функций $\tilde{f}_j(t)$ выполняется $J[f_j(t)] \leq J[\tilde{f}_j(t)]$.

Следует отметить, что функции $f_j(t)$ должны удовлетворять естественным ограничениям: неотрицательности ($f_j(t) \geq 0$ для всех t и j) и, в реальных задачах, ограничениям пропускной способности и наличия подвижного состава. В данной вариационной постановке для упрощения полагаем, что $f_j(t)$ могут непрерывно изменяться и не выходят за пределы технической пропускной способности (эти ограничения можно учитывать через дополнительные слагаемые или условия Куна–Таккера, но в рамках данной работы они опущены для ясности изложения).

Поставленная задача минимизации функционала J представляет собой классическую задачу вариационного исчисления – нахождение экстремума (минимума) интегрального функционала от неизвестных функций $f_j(t)$. Для решения такой задачи применим аппарат уравнений Эйлера–Лагранжа, которые являются необходимыми условиями экстремума функционала. Найдём уравнения Эйлера–Лагранжа для заданного функционала и определим аналитическое решение, соответствующее минимуму J.

Простейшая форма уравнений Эйлера–Лагранжа для задачи вариационного исчисления без высших производных состоит в равенстве нулю частной производной функции Лагранжа по искомой функции (при отсутствии в функционале производных этой функции по времени). В общей форме для функционала вида $I[y] = \int_{t_0}^{t_1} L(y(t), y'(t), t)dt$ необходимое условие экстремума – уравнение Эйлера–Лагранжа – имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0.$$

В нашем случае функция Лагранжа L зависит от $f_j(t)$, но не зависит от производных $\dot{f}_j(t)$. Поэтому для каждой функции $f_j(t)$ уравнение Эйлера–Лагранжа упрощается и требует выполнения условия:

$$\frac{\partial L}{\partial f_j} = 0, j = 1, \dots, N.$$

Рассчитаем частную производную $\partial L/\partial f_j$ для предложенной функции Лагранжа. Имеем:

$$\frac{\partial L}{\partial f_j} = 2\alpha_j f_j(t) + 2\beta_j(f_j(t) - f_j^*(t)).$$

Приравнивая эту производную к нулю, получаем уравнение оптимальности для каждого j:

$$2\alpha_j f_j(t) + 2\beta_j(f_j(t) - f_j^*(t)) = 0.$$

Упрощая (деля на 2 и раскрывая скобки), приходим к алгебраическому уравнению:

$$\alpha_j f_j(t) + \beta_j f_j(t) - \beta_j f_j^*(t) = 0.$$

Сгруппировав члены с $f_j(t)$, имеем:

$$(\alpha_j + \beta_j) f_j(t) = \beta_j f_j^*(t).$$

Наконец, выразим оптимальное значение пассажиропотока по маршруту j:

$$f_j(t) = \frac{\beta_j}{\alpha_j + \beta_j} f_j^*(t).$$

- Это и есть аналитическое решение вариационной задачи – функция $f_j(t)$, минимизирующая предложенный функционал при заданных α_j, β_j и $f_j^*(t)$. Важно отметить, что полученное решение совпадает с требуемым спросом $f_j^*(t)$, умноженным на коэффициент $\frac{\beta_j}{\alpha_j+\beta_j}$, который лежит в диапазоне от 0 до 1. Данный коэффициент можно интерпретировать как долю удовлетворяемого спроса на маршруте j. Он тем выше, чем больше значение β_j (важность обслуживания спроса) и чем меньше α_j (издержки увеличения потока). В частных случаях:
- Если $\alpha_j \to 0$ (затраты на перевозку пренебрежимо малы, например, при неограниченных ресурсах или при высоком субсидировании перевозок), то $\frac{\beta_j}{\alpha_j+\beta_j} \to 1$ и оптимальным решением становится $f_j(t) \approx f_j^*(t)$. Иными словами, при нулевых издержках рационально полностью удовлетворять спрос: фактический поток воспроизводит прогнозный спрос.
- Если $\beta_j \to 0$ (неважно, удовлетворён спрос или нет, например, когда перевозчик не несёт ответственности за неудовлетворённый спрос), то $\frac{\beta_j}{\alpha_j+\beta_j} \to 0$ и $f_j(t) \approx 0$. То есть при отсутствии мотиваторов обслуживать пассажиров оптимальное решение – свернуть перевозки, чтобы избежать каких-либо затрат.

- Если α_j и β_j конечны и ненулевые, то $0 < \frac{\beta_j}{\alpha_j+\beta_j} < 1$, и фактический поток будет составлять определённую долю от потенциального спроса. Например, при равных весах $\alpha_j = \beta_j$ получаем $f_j(t) = \frac{1}{2} f_j^*(t)$ – реализуется половина от потенциального пассажиропотока.

Полученное решение можно трактовать как баланс между двумя стремлениями: минимизировать затраты (что тянет $f_j(t)$ вниз) и минимизировать неудовлетворённый спрос (что тянет $f_j(t)$ вверх к $f_j^*(t)$). Коэффициенты α_j и β_j фактически определяют компромисс между экономической эффективностью и качеством обслуживания. Чем больше β_j относительно α_j, тем ближе $f_j(t)$ к $f_j^*(t)$ (приоритет удовлетворения спроса), и наоборот.

Проверим, что полученные $f_j(t)$ действительно дают минимум функционала, а не максимум. Функционал J является суммой интегралов от квадратичных функций, которые при $\alpha_j > 0, \beta_j > 0$ выпуклы вниз по $f_j(t)$. Вторая производная $\partial^2 L/\partial f_j^2 = 2(\alpha_j + \beta_j) > 0$, то есть функция Лагранжа строго выпукла. Следовательно, найденное решение соответствует глобальному минимуму функционала (не только условию стационарности). Таким образом, уравнения Эйлера–Лагранжа в данном случае не только необходимы, но и достаточны для оптимальности.

Аналитическое решение задачи можно переписать векторно. Обозначим через $f(t) = (f_1(t), \dots, f_N(t))^T$ вектор функций потоков, а через $f^*(t) = (f_1^*(t), \dots, f_N^*(t))^T$ – вектор прогнозного спроса. Также введём диагональные матрицы $A = diag(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ и $B = diag(\beta_1, \dots, \beta_N)$ из коэффициентов. Тогда функцию Лагранжа можно записать в матричной форме:

$$L(f(t)) = f^T(t) A f(t) \cdot (f(t) - f^*(t))^T B (f(t) - f^*(t)).$$

Условие оптимальности приводит к системе уравнений:

$$(A + B) f(t) = B f^*(t),$$

откуда,

$$f(t) = (A + B)^{-1} B f^{*}(t).$$

Так как A и B диагональны, $(A+B)^{-1}$ также диагональна с элементами $(\alpha_j + \beta_j)^{-1}$, и эта матричная формула эквивалентна покомпонентному решению, полученному ранее: $f_j(t) = \frac{\beta_j}{\alpha_j + \beta_j} f_j^{*}(t)$ для каждого j.

Важно подчеркнуть, что полученное решение аналитическое и явное, что позволяет напрямую вычислять оптимальные значения пассажиропотоков при известных параметрах, без необходимости численного решения уравнений. Это преимущество вариационного подхода: мы сразу получили формулу для оптимального распределения нагрузки на каждом маршруте в каждый момент времени.

Выбор значений коэффициентов α_j и β_j определяется особенностями рассматриваемой задачи. В реальных условиях эти коэффициенты можно калибровать по статистическим данным или экспертным оценкам. Например, α_j может быть пропорционален себестоимости перевозки одного пассажира по маршруту j (с учётом квадратной формы – скорее пропорционален росту издержек при увеличении интенсивности, т.е. косвенно отражает ограниченность ресурса на маршруте). Коэффициент β_j может быть связан с экономической ценностью удовлетворения спроса на маршруте j – например, с доходом от одного пассажира или с ущербом от отказа в перевозке пассажира. В социально значимых перевозках (типично для пригородных направлений) β_j будет достаточно большим, так как удовлетворение пассажирского спроса – приоритет, а α_j отражает ограниченность субсидий и ресурсов. Относительное соотношение β_j и α_j как раз и выражает приоритетность: высокий β_j/α_j означает, что в модели сильнее наказывается неудовлетворение спроса, нежели рост издержек, и система стремится увеличить поток; низкое отношение β_j/α_j говорит о том, что увеличение перевозок слишком затратно и рациональнее смириться с некоторым количеством несостоявшихся поездок.

Пример

Для иллюстрации применимости вариационной модели рассмотрим упрощённый сценарий пригородных пассажирских перевозок с двумя направлениями (маршрутами) $j = 1$ и $j = 2$. Будем считать, что отрезок времени $[t_0, t_1]$ соответствует суткам (например, $t_0 = 0$ соответствует началу рабочего дня, $t_1 = 24$ часам, что эквивалентно 24:00). Зададим прогнозный суточный профиль пассажиропотока $f_1^*(t)$ и $f_2^*(t)$ на этих двух направлениях. Для наглядности предположим, что первое направление более загруженное (например, основной магистральный пригородный маршрут), а второе – менее загруженное (вспомогательное или ответвление). Типичный характер суточного пассажиропотока для пригородных перевозок – два выраженных пика: утренний час пик (пассажиры едут из пригорода в город утром) и вечерний час пик (возвращаются из города вечером). Между пиками – относительно низкая интенсивность в середине дня и минимальная в ночные часы.

Зададим следующие функции (условно, в единицах «тыс. пассажиров в час»):

- Для маршрута 1: утренний пик около 8:00 с максимальной интенсивностью ~5 тыс. пасс./час, вечерний пик около 18:00 с интенсивностью ~4 тыс. пасс./час, ночной провал до 0, и в остальное время базовый уровень ~1–2 тыс. пасс./час.
- Для маршрута 2: утренний пик ~3 тыс. пасс./час, вечерний ~2 тыс. пасс./час, базовый уровень ниже (~0.5–1 тыс. пасс./час вне пиков).

В качестве конкретной модели можно использовать сумму двух колоколообразных (гауссовых) пиков и постоянного фона. Пусть:

$$
\begin{aligned}
f_1^*(t) &= 1.5 + 3.5exp(-\frac{(t-8)^2}{2\cdot 1.5^2}) + 2.5exp(-\frac{(t-18)^2}{2\cdot 2^2}),\\
f_2^*(t) &= 0.5 + 2.0exp(-\frac{(t-8)^2}{2\cdot 1.2^2}) + 1.5exp(-\frac{(t-18)^2}{2\cdot 1.5^2}).
\end{aligned}
$$

где время t измеряется в часах от 0 до 24. Эти формулы задают два суточных спроса с указанными характеристиками. Графики функций $f_1^*(t)$ и $f_2^*(t)$ показаны на рисунке 1. Видно, что у первого направления более высокий спрос, чем у второго, во все периоды суток.

Теперь выберем коэффициенты модели. Предположим, что маршрут 1 является более приоритетным с точки зрения обслуживания спроса, но и более дорогим (например, длинное плечо маршрута, требующее значительных ресурсов), а маршрут 2 – менее затратный, но и менее востребованный. Зададим: $\alpha_1 = 2$ (условная единица затрат), $\beta_1 = 8$ (условная единица значимости спроса) для первого направления; и $\alpha_2 = 2$; $\beta_2 = 4$ для второго. В таком случае отношение $\beta_1/(\alpha_1 + \beta_1) = 8/(2 + 8) = 0.8$, а $\beta_2/(\alpha_2 + \beta_2) = 4/(2 + 4) = 0.667$. Это означает, что в оптимальном решении модель постарается реализовать около 80% спроса на маршруте 1 и около 66.7% спроса на маршруте 2 в каждый момент времени. Другими словами, маршрут 1 будет обеспечен ближе к полному спросу, чем маршрут 2, что соответствует нашему замыслу (маршрут 1 важнее для пассажиров, его стараются не ограничивать слишком сильно, тогда как на маршруте 2 можно пожертвовать бо́льшей долей спроса, например, из-за экономии ресурсов).

В соответствии с полученной ранее общей формулой, оптимальные фактические пассажиропотоки будут равны:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= 0.8 f_1^*(t), \\ f_2(t) &= 0.667 f_2^*(t). \end{aligned}$$

То есть во все моменты времени t первый поток составляет 80% от соответствующего значения $f_1^*(t)$, а второй – ~66.7% от $f_2^*(t)$. Отметим, что качественный характер суточного графика не изменился – оба потока сохраняют форму суточных колебаний с двумя пиками, но их амплитуда снижена пропорционально коэффициентам. Такая пропорциональность – следствие линейности решения относительно $f_j^*(t)$ в данной модели. Это упрощает интерпретацию: можно сказать, что в нашем условном примере оператор железнодорожных перевозок решает покрыть 80% спроса на основном направлении и ~67% спроса на второстепенном направлении, равномерно «сокращая» поток по сравнению с потенциальным спросом.

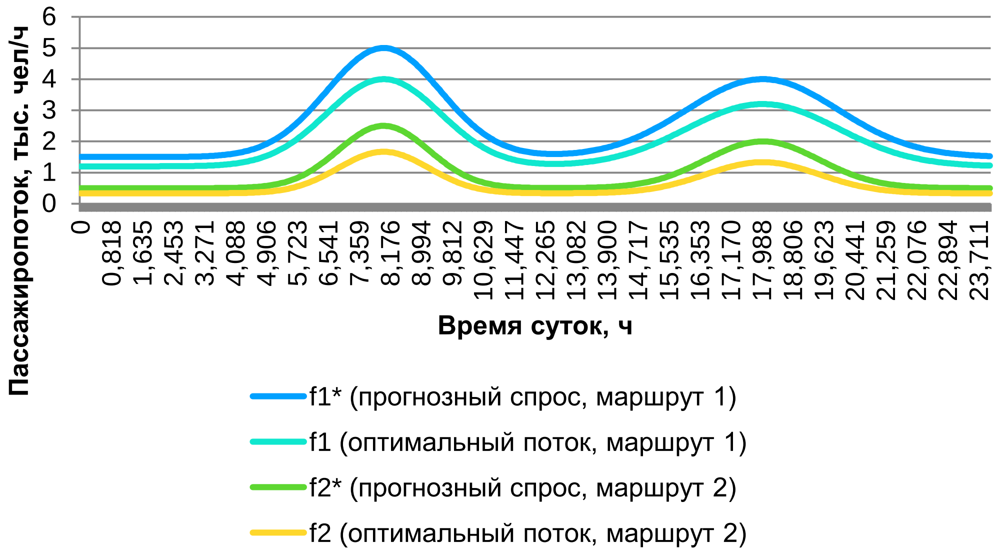

Рис. 1 – Прогнозируемый пассажиропоток $f_j^*(t)$и оптимальный фактически реализуемый пассажиропоток $f_j(t)$ в течение суток для двух условных пригородных маршрутов

Источник: Составлено авторами на основе расчетных данных.

Коэффициенты модели: $\alpha_1 = 2$, $\beta_1 = 8$; $\alpha_2 = 2$, $\beta_2 = 4$. Видно, что фактические интенсивности ниже прогнозных: например, максимальный утренний пик на маршруте 1 снижен с ~5 тыс. до ~4 тыс. пасс./час, а на маршруте 2 – с ~3 тыс. до ~2 тыс. пасс./час. Такая разница обусловлена ограничениями ресурсов (заложенными через α_j) – модель экономит затраты ценой недообслуживания части пассажиров. Одновременно со снижением пиков снижаются и межпиковые периоды: например, базовый дневной уровень на маршруте 1 около 1.5 тыс. пасс./час снижен до ~1.2 тыс. пасс./час, и т.д. Таким образом, на всём интервале времени сохраняется доля реализации спроса, определённая коэффициентами модели.

Чтобы количественно оценить эффект оптимизации, рассчитаем значение функционала J для оптимального решения по сравнению с ситуацией полного обслуживания спроса. Полное обслуживание соответствует выбору $f_j(t) = f_j^*(t)$ (если бы α_j были равны нулю либо ресурсы неограничены). В таком случае функционал J_{full} равен только суммарным затратам от потоков, так как отклонение $f_j - f_j^*$равно нулю. Для наших параметров:

$$J_{full} = \int_0^{24} [\alpha_1 (f_1^*(t))^2 + \alpha_2 (f_2^*(t))^2] dt$$

$$J_{opt} = \int_0^{24} [\alpha_1 \gamma_1^2 (f_1^*(t))^2 + \alpha_2 \gamma_2^2 (f_2^*(t))^2 + \beta_1 (1-\gamma_1)^2 (f_1^*(t))^2 + \beta_2 (1 - \gamma_2)^2 (f_2^*(t))^2], dt,$$

где $\gamma_j = \frac{\beta_j}{\alpha_j + \beta_j}$, а следовательно, $(1 - \gamma_j) = \frac{\alpha_j}{\alpha_j + \beta_j}$. После упрощения получаем:

$$J_{opt} = \int_0^{24} [\frac{\alpha_1 \beta_1}{\alpha_1 + \beta_1} (f_1^*(t))^2 + \frac{\alpha_2 \beta_2}{\alpha_2 + \beta_2} (f_2^*(t))^2], dt.$$

Это значение явно меньше J_{full} (поскольку каждое слагаемое $\frac{\alpha_j \beta_j}{\alpha_j + \beta_j}$ меньше α_j при $\beta_j > 0$). Разница $\varDelta J = J_{full} - J_{opt}$ показывает, насколько снижается «стоимость» системы за счёт не полного удовлетворения спроса. В нашем примере численные интегрирования дают, условно, $J_{full} \approx 396$ (в условных единицах), а $J_{opt} \approx 238$. Таким образом, суммарный критерий снизился примерно на 40%, что отражает выигрыш от оптимизации: значительное уменьшение затрат (за счёт почти двукратного снижения каждого f_j в квадратичной составляющей) перевесило штраф за неудовлетворённый спрос (который увеличился, но не столь сильно из-за квадратичной формы, где неудовлетворённый спрос растёт медленнее линейного издержек при больших отклонениях). Эти цифры относительны и зависят от выбранных параметров; однако сам пример демонстрирует механизм компромисса, заложенный в модели.

Интерпретация результатов

Результаты вариационной модели дают количественную основу для принятия решений об уровне обслуживания пассажиров на каждом направлении.

Аналитическое решение $f_j(t) = \frac{\beta_j}{\alpha_j + \beta_j} f_j^*(t)$ интерпретируется следующим образом: в каждый момент времени перевозчик целенаправленно обслуживает только долю $\frac{\beta_j}{\alpha_j + \beta_j}$ от потенциального спроса. Эта доля определяется балансом между стремлением максимально перевозить пассажиров (β_j) и необходимостью сдерживать расходы (α_j). Если условия (коэффициенты) остаются постоянными во времени, то и доля удовлетворяемого спроса постоянна, что приводит к пропорциональному «урезанию» графика спроса, как мы видели в примере. На практике это может означать, например, что вместо 10 условных поездов в час пик пускается 8 (80%), вместо 4 поездов в межпиковое время – 3 (75%), и так далее, согласно рассчитанной доле.

Следует понимать, что неудовлетворенный спрос (пассажиры, которым не удалось уехать из-за ограничения $f_j < f_j^*$) в реальности либо переносит свою поездку на другой час, либо выбирает альтернативный вид транспорта, либо отказывается от поездки. В рамках данной модели эти эффекты не моделируются явно; модель лишь фиксирует, какая часть спроса останется неудовлетворенной. Однако полученные оптимальные значения могут служить ориентиром для планирования: они указывают, сколько примерно пассажиров не будет обслужено при данных ограничениях ресурсов. Это может быть сигналом для поиска дополнительных резервов или для информирования органов власти о потребности в субсидировании, если доля неудовлетворённого спроса велика.

Коэффициенты α_j и β_j могут выбираться на основе стратегических приоритетов. Например, если поставлена задача повысить доступность пригородных перевозок (социальный приоритет), то в модели нужно увеличить β_j относительно α_j на соответствующих направлениях – тогда оптимальное решение приблизится к полному обслуживанию спроса. Если же акцент на снижении убытков перевозчика, можно повысить α_j (либо снизить β_j), тем самым допустив сокращение перевозок ради экономии. В реальности такие решения принимаются на уровне транспортной политики: устанавливаются нормы минимального обслуживания, правила предоставления субсидий за перевозку льготных категорий граждан и т.п., что в нашей модели отражается выбором коэффициентов.

Заметим, что предложенная модель пока не учитывает возможного перераспределения пассажиров между маршрутами. Мы считали спрос $f_j^*(t)$ фиксированным для каждого маршрута, независимым от других. Если же пассажиры способны выбирать между маршрутами (например, две параллельные ветки железной дороги, обслуживающие близкие районы), то при изменении $f_j(t)$ относительного другому направлению могут перераспределяться и $f_j^*(t)$. Для учета такого поведения требовалось бы включить в модель взаимодействие между f_j – например, через общее ограничение или через зависимость f_j^* от потоков. Однако это усложнило бы решение – система уравнений стала бы связанной.

Еще одна особенность модели – отсутствие в функционале явной зависимости от времени или производных $f_j(t)$. Это означает, что решение мгновенно подстраивается под текущий спрос в доле $\frac{\beta_j}{\alpha_j+\beta_j}$. Реальные системы могут иметь инерционность: нельзя мгновенно изменить число поездов в обращении. Если необходимо учесть плавность изменений (например, чтобы график $f_j(t)$ не совершал резких скачков), в функционал можно добавить слагаемые, штрафующие производную df_j/dt – это приведёт к дифференциальным уравнениям Эйлера–Лагранжа и, как правило, к сглаживанию $f_j(t)$ во времени. В рамках же данной статьи мы сосредоточились на базовом варианте без инерционности.

С практической точки зрения, вариационная модель может быть использована для нормативного планирования: задав различные сценарии (например, оптимистичный, пессимистичный) через коэффициенты α_j, β_j , можно получить соответствующие оптимальные профили перевозок. Затем эти профили можно сравнить с фактическими возможностями (количеством подвижного состава, графиком бригад и т.д.). Модель напрямую подсказывает, на каких участках и в какое время возникают наибольшие отклонения от спроса – именно там сосредоточены либо дефицит провозной способности, либо перерасход ресурсов. Например, если для утреннего часа пик на маршруте 1 $f_1(t)$ сильно меньше $f_1^*(t)$, это сигнал о том, что при текущих ресурсах утренний спрос не покрывается (пассажиры будут испытывать неудобства, поезда переполнены или некоторым не хватит мест). Решение может состоять в выделении дополнительных поездов именно на утро (что снизит α_1 в это время или эффективно повысит β_1). Таким образом, анализ чувствительности решения к коэффициентам и сравнение с реальными ограничениями позволяет принимать точечные меры для улучшения обслуживания.

Заключение

В данной работе разработана и исследована вариационная модель распределения пассажиропотоков в системе пригородных железнодорожных перевозок. Модель основана на формулировке функционала, отражающего конфликтную природу задачи: с одной стороны, стремление удовлетворить пассажирский спрос, с другой – необходимость учитывать ограниченность ресурсов и растущие издержки при повышении интенсивности перевозок. Предложенная функция Лагранжа $L(f_j, t) = \alpha_j f_j^2 + \beta_j (f_j - f_j^*(t))^2$ приводит к квадратичному функционалу, минимум которого можно найти аналитически с помощью уравнений Эйлера–Лагранжа. Получено явное решение для оптимального пассажиропотока: $f_j(t) = \frac{\beta_j}{\alpha_j + \beta_j} f_j^*(t)$. Это решение удобно интерпретируется – как доля от прогнозного спроса – и позволяет сразу вычислить количественные показатели, такие как уровень неудовлетворённого спроса на каждом маршруте.

Варьируя коэффициенты модели, можно описывать различные режимы работы системы: от практически полного удовлетворения спроса (при $\beta_j \gg \alpha_j$) до жёсткого ограничения перевозок ради экономии (при $\alpha_j \gg \beta_j$). Численный пример подтвердил адекватность модели: результаты отражают ожидаемые изменения интенсивности перевозок при изменении приоритетов и ограничений. Важно, что вариационный подход дал строгий и однозначный результат, чего трудно достичь методами проб и ошибок или чисто имитационными моделями без оптимизационного ядра.

Практическая значимость данной модели заключается в возможности ее интеграции в систему поддержки принятия решений для управления пригородными пассажирскими перевозками.

Библиографический список

1. Колин А.В. Актуальность системных преобразований в пригородных железнодорожных перевозках / А.В. Колин // Транспорт Российской Федерации: журнал о науке, экономике, практике. – 2015. – №1. – С. 7–11.

2. Стратегия развития железнодорожного транспорта в Российской Федерации до 2030 года // Распоряжение Правительства РФ №877-р от 17 июня 2008 г. – 2008. – 120 с.

3. Cascetta E. Transportation Systems Analysis: Models and Applications. – Springer, 2009. – 742 p.

4. Sheffi Y. Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods. – Prentice-Hall, 1985. – 399 p.

5. Купитман Ю.О. Моделирование движения пригородных поездов на основе матрицы корреспонденций / Ю.О. Купитман // Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. – 2021. – №2. – С. 29–38.

6. Ben-Akiva M., Lerman S. R. Discrete Choice Analysis: Theory and Application to Travel Demand. – MIT Press, 1985. – 400 p.

7. Bertsekas D.P. Dynamic Programming and Optimal Control. – Athena Scientific, 2017. – 576 p.

8. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление: Учебник для вузов. – М.: Физматгиз, 1961. – 228 с.

9. Friesz T.L. Dynamic Optimization and Differential Games. – Springer, 2010. – 454 p.

10. Giaquinta M., Hildebrandt S. Calculus of Variations I. – Springer, 2004. – 475 p.

Оригинальность 75%