

УДК 512.623.3

***ВНЕДРЕНИЕ СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ MAPLE В
ПРОЦЕСС ИЗУЧЕНИЯ ТЕОРИИ ГАЛУА***

Гузненко Р.А.

Аспирант

Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф.

Устинова

Санкт – Петербург, Россия

Аннотация: В статье рассмотрены преимущества внедрения системы компьютерной алгебры Maple в процесс изучения теории Галуа. Проанализированы возможности пакета для проверки разрешимости уравнений в радикалах. Выявлены возможности изучения промежуточных подполей расширения поля разложения исходного многочлена.

Ключевые слова: Maple, теория Галуа, система компьютерной алгебры, уравнение, группа.

***IMPLEMENTATION OF THE MAPLE COMPUTER ALGEBRA SYSTEM IN
THE PROCESS OF STUDYING GALOIS THEORY***

Guznenko R.A.

Ph.D student

Baltic State Technical University "VOENMEKH" named after D.F. Ustinov

Saint – Petersburg, Russia

Abstract: The article discusses the advantages of implementing the Maple computer algebra system in the process of studying Galois theory. The possibilities of the

package for checking the solvability of equations in radicals are analyzed. The possibilities of studying intermediate subfields of expansion of the decomposition field of the initial polynomial are revealed.

Key words: Maple, Galois theory, computer algebra system, equation, group.

1. Введение

В наши дни благодаря мощному развитию вычислительных технологий, мы имеем возможность значительно упростить процесс решения математических задач, а также минимизировать время анализа полученных результатов. Такие системы компьютерной математики, как «Maple», «Mathcad» или «Matlab» позволяют производить различные вычисления, решать задачи в символьном виде, что даёт большую точность, нежели какой-либо численный метод, а также представить информацию графически, что делает любой результат более наглядным.

Глобальная компьютеризация затрагивает практически все сферы жизни, и образовательная не является исключением. Однако в рамках изучения курсов высшей математики зачастую пренебрегают возможностью использования систем компьютерной алгебры. И если в случае классических курсов вроде математического анализа [1] или вариационного исчисления [2] мы можем видеть положительные тенденции по внедрению этих систем в образовательный процесс, то в случаях более узконаправленных областей статистика является крайне бедной.

В данной статье мы рассмотрим применение системы компьютерной алгебры «Maple» в процессе изучения теории Галуа. Теория Галуа - это раздел алгебры, который позволяет переформулировать некоторые вопросы теории полей на языке теории групп, делая их более простыми. Эварист Галуа сформулировал основные утверждения этой теории в терминах перестановок корней заданного

многочлена с рациональными коэффициентами. Более современный подход к теории Галуа заключается в изучении автоморфизмов расширения произвольного поля при помощи группы Галуа, соответствующей данному расширению.

Теория Галуа даёт мощные инструменты для решения такой задачи, как разрешимость уравнения в радикалах. Студенту, начинающему погружаться в эту сложную область, бывает тяжело осознать все те абстрактные объекты, которые используются в теории. Обучающемуся не хватает наглядных примеров, которые отсутствуют в классических курсах известных авторов. К тому же, вычисление группы Галуа многочлена с рациональными коэффициентами зачастую является самой нетривиальной задачей.

Именно поэтому важно использовать систему компьютерной алгебры «Maple» при изучении данного материала, так как в «Maple» имеются пакеты для работы с алгебраическими группами и полями.

Далее рассмотрим конкретные примеры:

2. Уравнение $x^5 - 5x + 12 = 0$

Для вычисления группы Галуа напишем в Maple команду (см. Рис.1)

```
[> restart;  
=> with(GroupTheory) ;  
=> galois (x^5-5*x+12) ;  
"5T2", {"5:2", "D(5)", "+", 10, {"(1 2 3 4 5)", "(1 4)(2 3)"}] (1)
```

Рисунок 1- Вычисление группы Галуа. Авторская разработка

Поэтому группа Галуа поля разложения $x^5 - 5x + 12$ над Q изоморфна диэдральной группе D_5 , выведен её порядок 10 и порождающие её перестановки (12345) и (14)(23). Теперь проверим разрешимость группы Галуа (См. Рис.2)

```

[> G := DihedralGroup(5);
                                     G := D5
]
[> IsSoluble(G);
                                     true
]

```

Рисунок 2- Проверка разрешимости группы Галуа. Авторская разработка

Поэтому группа Галуа разрешима, поэтому по теореме Галуа [3] уравнение

$$x^5 - 5x + 12 = 0$$

разрешимо в радикалах над Q . Это можно увидеть и другим способом, решив уравнение (см. Рис.3)

```

[> solve(x^5-5*x+12 = 0, Explicit = true) [1];

```

$$\begin{aligned}
& \frac{625^{1/5} \left(\frac{2\sqrt{5}\sqrt{5-\sqrt{5}} - 5\sqrt{5-\sqrt{5}} + 6\sqrt{5} - 12}{\sqrt{5-\sqrt{5}}} \right)^{1/5}}{5} \\
& + \frac{\left(250 - 125\sqrt{5} + 125\sqrt{5-\sqrt{5}} - \frac{250\sqrt{5}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}} \right) 625^{2/5}}{3125 \left(\frac{2\sqrt{5}\sqrt{5-\sqrt{5}} - 5\sqrt{5-\sqrt{5}} + 6\sqrt{5} - 12}{\sqrt{5-\sqrt{5}}} \right)^{3/5}} \\
& + \frac{(-25\sqrt{5} + 25\sqrt{5-\sqrt{5}}) 625^{3/5}}{3125 \left(\frac{2\sqrt{5}\sqrt{5-\sqrt{5}} - 5\sqrt{5-\sqrt{5}} + 6\sqrt{5} - 12}{\sqrt{5-\sqrt{5}}} \right)^{2/5}} \\
& - \frac{\sqrt{5} 625^{4/5}}{625 \left(\frac{2\sqrt{5}\sqrt{5-\sqrt{5}} - 5\sqrt{5-\sqrt{5}} + 6\sqrt{5} - 12}{\sqrt{5-\sqrt{5}}} \right)^{1/5}}
\end{aligned}$$

Рисунок 3- Решение уравнения. Авторская разработка

Здесь получили первый корень, так как написали [1] после *solve*. Теперь при помощи теории Галуа изучим промежуточные подполя в расширении

$$Q \subset Q(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$

где x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 -- корни нашего уравнения. Для этого построим граф подгрупп группы Галуа (см. Рис.4)

```
[> DrawSubgroupLattice(G, 'labels = zuppos', 'indices');
```

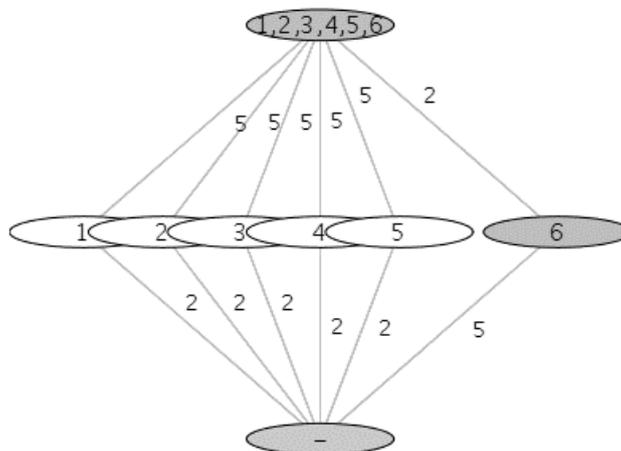


Рисунок 4- Граф подгрупп группы Галуа. Авторская разработка

Здесь числами в вершинах пронумерованы подгруппы G , а числами на рёбрах указаны индексы группы в нижней вершине ребра как подгруппы в группе в верхней вершине ребра и цветом показан единственный ряд нормальных подгрупп. Поэтому благодаря соответствию Галуа из теоремы можно описать все промежуточные подполя в расширении

$$Q \subset Q(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$

их ровно 6, как мы видим из решётки подгрупп группы Галуа G выше.

3. Уравнение $x^5 - 10x + 5 = 0$

Для вычисления группы Галуа напишем в Maple команду (см. Рис.5)

```
[> restart;
> with(GroupTheory);
> galois(x^5-10*x+5);
      "5T5", {"S(5)"}, "-", 120, {"(1 5)", "(2 5)", "(3 5)", "(4 5)"}      (6)
> G := SymmetricGroup(5);
      G := S5      (7)
```

Рисунок 5- Вычисление группы Галуа. Авторская разработка

Поэтому группа Галуа поля разложения $x^5 - 10x + 5$ над Q изоморфна симметрической группе S_5 , выведен её порядок 120 и порождающие её перестановки (15), (25), (35) и (45). Теперь проверим разрешимость группы Галуа (см. Рис.6)

```

[ > G := SymmetricGroup(5);
  G := S5
  (7)
[ > IsSoluble(G);
  false
  (8)

```

Рисунок 6- Проверка разрешимости группы Галуа. Авторская разработка

Поэтому группа Галуа не разрешима, поэтому по теореме Галуа уравнение

$$x^5 - 10x + 5 = 0$$

не разрешимо в радикалах над Q .

4. Заключение

Таким образом, использование компьютерных вычислений в образовательной среде делает процесс математического моделирования ситуации более наглядным для обучающихся, позволяет сократить количество вычислений и сравнить ручной и компьютерный методы решения одной и той же задачи.

В случае теории Галуа, области, где количество специалистов не так велико, участие компьютера в процессе обучения сможет повысить качество образования. Система компьютерной алгебры Maple позволит повысить интерес к изучаемой дисциплине, а также улучшить глубину понимания материала среди студентов, для преподавателей же внедрение этой системы значительно упростит поиск примеров конкретных уравнений и расширит методические возможности обучения.

Все рисунки выполнены автором в системе компьютерной алгебры «Maple».

Библиографический список:

1. Хамидуллин Р.И., Маршания К.М. Создание и апробация электронного учебного пособия “Использование математического пакета “Maple” в процессе изучения кратных интегралов” для повышения эффективности изучения математики в высших учебных заведениях // *Фундаментальные исследования*. – 2015. – № 11 (часть 2) – С. 333-337.
2. Шевченко, А. С. Применение математического пакета Maple к решению вариационных задач // *Молодой ученый*. – 2015. – № 22 (102). – С. 33-37.
3. Н.Г Чеботарёв. Теория Галуа // Гл. ред. общетехн. лит. и номографии. – 1934. – 220 с.

Оригинальность 75%