УДК 519.853

ДВЕ ТЕОРЕМЫ О Λ-МОНОТОННОСТИ

Киселев В.В.

к.т.н., доцент,

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана,

Москва, Россия

Аннотация

В данной статье рассматривается возможность использования идеи декомпозиции при поиске оптимального решения для моделей сложных систем. Эта возможность предлагается для случая Λ-монотонных целевых функций. Приводятся две теоремы о Λ-монотонности и иллюстрирующие численные примеры.

Ключевые слова: математическое программирование, задачи большой размерности, декомпозиция математических моделей сложных систем, монотонные функции.

TWO THEOREMS ON Λ-MONOTONICITY

Kiselev V. V.

Ph. D., associate Professor, Bauman

Moscow State Technical University,

Moscow, Russia

Annotation

This article discusses the possibility of using the idea of decomposition in the search for optimal solutions for models of complex systems. This possibility is proposed for the case of Λ-monotonic objective functions. Two theorems on Λ-monotonicity and illustrative numerical examples are given.

Keywords: mathematical programming, high-dimensional problems, decomposition of mathematical models of complex systems, monotonic functions.

При создании и исследовании моделей сложных технических и экономических систем одной из важнейших проблем, является проблема выбора оптимального варианта. Будем рассматривать класс задач, которые формализованы как задачи математического программирования. Для решения простых задач математического программирования хорошо разработан математический аппарат и существует большое количество литературы [1-4;9]. Одной из областей математического программирования, которая в настоящее время находится в стадии развития, является область, исследующая задачи большой размерности. Некоторые известные методы решения задач большой размерности представлены в работах [5-8;10]. Интересный подход для решения задач большой размерности в автоматизированном проектировании был предложен П.С. Краснощековым, В.В. Морозовым, В.В. Федоровым в работе [6]. В этой работе рассматривалась задача проектирования сложной технической системы, такой, как, например, самолет или ракета. Задача поиска оптимального решения

$$x^0 \in \operatorname{Arg}\max_{x \in X} F(x), \qquad (1)$$

где $X \subset R^n$. Здесь x – вектор конструктивных параметров, X – множество допустимых значений, F(x) – глобальный критерий эффективности, определенный на множестве допустимых значений, не решалась в “лоб” при использовании современной вычислительной техники. Для решения этой задачи предлагалась идея декомпозиции. Выделялись частные критерии эффективности $u_1(x),...,u_m(x)$, предполагалось, что эти критерии желательно максимизировать (если некоторые критерии желательно минимизировать, то их можно умножить на минус единицу и переобозначить). Глобальный критерий эффективности представлялся в виде

$$F(x) = \Phi(u_1(x),...,u_m(x)).$$

Далее рассматривался случай, когда выполнялось условие монотонности:

Для любых $x', x'' \in X$ и $u_i(x') \geq u_i(x''), i = \overline{1,m}$ следует $F(x') \geq F(x'')$.

В этом случае функция Φ(u) определена на множестве U=u(X) и монотонна на нем, т.е. для любых $u', u'' \in U$ и $u' \geq u'', i = \overline{1,m}$ следует $\Phi(u') \geq \Phi(u'')$.

Тогда задача (1) эквивалентна задаче поиска

$$x^0 \in \operatorname{Arg}\max_{x \in X_П} F(x),$$

где $X_П$ - множество Парето-оптимальных векторов в X и может быть эквивалентна задаче поиска

$$u^0 \in \operatorname{Arg}\max_{u \in U_П} \Phi(u),$$

здесь $U_П$ - множество Парето-оптимальных решений в U.

В статье [5] рассматривалась похожая задача, но для значительно более широкого класса целевых функций. Использовались более широкие понятия Λ-оптимальности Λ-монотонности, включающие в себя понятия Парето-оптимальности и монотонности соответственно. Были сформулированы общие условия декомпозиции.

Определение. Вариант $x_Λ \in X$ называется Λ-оптимальным, если не существует варианта $x' \in X$ такого, что $u(x') - u(x_Λ) \in Λ, u(x') \neq u(x_Λ)$ где Λ-выпуклый конус.

Определение. Вариант $u_Λ \in U$ называется Λ-оптимальным, если не существует варианта $u' \in U$ такого, что $u' - u_Λ \in Λ, u' \neq u_Λ$ где Λ-выпуклый конус.

Множество всех Λ-оптимальных вариантов в X будем обозначать $X_Λ$, а множество всех Λ-оптимальных вариантов в U будем обозначать $U_Λ$.

Определение. Пусть глобальный критерий эффективности F(x) определен на множестве X, задан выпуклый конус Λ. Будем говорить, что функция F(x) Λ-

монотонна, если любых $x', x'' \in X$ и $u(x') - u(x'') \in \Lambda$ выполняется неравенство $F(x') \geq F(x'')$.

Определение. Функция Φ(u), определенная на множестве U, называется Λ-монотонной, если для любых $u', u'' \in U$ и $u' - u'' \in \Lambda$ следует $\Phi(u') \geq \Phi(u'')$..

Далее будем полагать, что множество X – замкнуто, все рассматриваемые функции непрерывны в области определения.

Сформулируем теоремы, которые позволяют в некоторых случаях определить Λ-монотонность целевой функции.

Теорема. Сумма любого числа Λ-монотонных функций есть Λ-монотонная функция.

Доказательство. Пусть $u_i(x), i = \overline{1,L}$ - Λ-монотонные функции. Зафиксируем произвольную точку $x' \in X, x' \notin X_\Lambda$. Для любой точки $x'' \in X$, такой, что $u(x') - u(x'') \in \Lambda$ следует $u(x') \geq u(x''), i = \overline{1,L}$ и $\Sigma u_i(x') \geq \Sigma u_i(x'')$.

Пример. Функции

$$u_1 = -2x_1 + 4x_2,$$
$$u_2 = -3x_1 + 3x_2$$

Λ-монотонны, например, для конуса $\Lambda = \{\lambda \mid \lambda = \alpha(-3,3) + \beta(-2,4), \alpha \geq 0, \beta \geq 0\}$.

Следовательно функция $u_1 + u_2 = -5x_1 + 7x_2$ будет Λ-монотонной для данного конуса.

Теорема. Функция f(x) задана на множестве $X \subset R^n$ и Λ-монотонна на этом множестве. Функция $\psi(t)$ - монотонно возрастающая на множестве значений $y = f(x)$. Тогда функция $g(x) = \psi(f(x))$ является Λ-возрастающей на множестве X.

Пример. Функция $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ является Λ-монотонной на множестве $X = \{x \mid x_1 \leq 0, x_2 \geq 0\}$ для конуса Λ=X. Функция e^t является возрастающей на всей области определения. Следовательно функция $g(x) = e^{x_1^2 + x_2^2}$ является Λ-монотонной на множестве X.

При решении достаточно сложных задач использование сеточных методов может привести к очень большому количеству вычислений и невозможности получения нужного результата в заданные сроки. Тогда использование Λ-монотонности может значительно сократить количество вычислений, поскольку поиск оптимального решения будет осуществляться только на множестве Λ-оптимальных решений, которое может быть значительно уже, чем исходное множество.

Пример. Пусть глобальный критерий f(x) эффективности задан программным модулем и Λ-монотонен для конуса $\Lambda = \{x \mid x_1 \le 0, x_2 \ge 0\}$ на множестве X. Предполагается, что время вычисления одного значения функции y=f(x) достаточно велико. Пусть

$$X = A \cup B \cup C,$$
$$A = \{x \mid -10 \le x_1 \le -8, 0 \le x_2 \le 4\},$$
$$B = \{x \mid -8 \le x_1 \le -6, 0 \le x_2 \le 5\},$$
$$C = \{x \mid -6 \le x_1 \le 0, -x_1 + x_2 \le 9\}.$$

Здесь можно заметить, что множество X не является выпуклым. Множество $X_\Lambda = X^1 \cup X^2 \cup Z$, где

$$X^1 = (-10, 4), X^2 = (-8, 5),$$
$$Z = \{z \mid z = \alpha(-8, 5) + (1-\alpha)(0, 9), \alpha \in [0, 1]\}.$$

Даже для данной задачи применение сеточных методов на множестве X_Λ может значительно сократить общее время вычислений.

В данной работе сформулированы теоремы и приведены примеры, которые позволяют для некоторых классов задач определить Λ-монотонность глобального критерия эффективности. Теоремы могут быть использованы при создании алгоритмов поиска оптимальных решений в задачах большой размерности.

Библиографический список

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. -СПб.: Издательство Лань, 2022.

2. Зойтендейк Г. Методы возможных направлений. - М.: Издательство

иностранной литературы, 1963.

3. Карманов В.Г. Математическое программирование. -М.: Физматлит, 2008.

4. Киселев В.В., Гончаренко В.М. Математическое моделирование социально-экономических процессов. -М.: КНОРУС, 2021.

5. V.V Kiselev. Application of the Λ-Monotonicity to the Search for Optimal Solutions in Higher-Dimensional Problems. JOURNAL OF MASHEMATICAL SCIENCE. - 2016- Volume 216. - Number 5. –pp. 667-673. (2016).

6. Краснощёков П.С., Морозов В.В., В.В. Фёдоров. Декомпозиция в задачах проектирования //Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. - 1979. - №2.

7. Краснощеков П.С. Оптимизация в автоматизированном проектировании. - М.: МАКС Пресс, 2018.

8. Математические методы в экономике и финансах/ под ред. В.М. Гончаренко и В.Ю. Попова. -М.: КНОРУС, 2016. С. 244-266.

9. Фиакко А., Мак-Кормик Г. Нелинейное программирование. - М.: МИР, 1972.

10. Цурков В.И. Декомпозиция в задачах большой размерности. -М: Наука, 1981.