УДК 517.958

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ-НЕЙМАНА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ НА ГРАНИЦЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА КЕЛДЫША В СЛОЕ

Алгазин О.Д.

кандидат физико-математических наук, доцент

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)

Москва, Россия

Аннотация

Рассмотрена смешанная краевая задача Дирихле-Неймана для неоднородного уравнения типа Келдыша в слое $x \in \mathbb{R}^n, 0 < y < a$, в котором уравнение принадлежит к эллиптическому типу, а на границе $y = 0$ параболически вырождается. С помощью преобразования Фурье показано, что эта задача имеет единственное решение в классе функций медленного роста по x, если правая часть уравнения и правые части граничных условий являются функциями медленного роста, например, полиномами. В том случае, когда правая часть уравнения и правые части граничных условий являются полигармоническими функциями, построены точные решения. Приведен алгоритм построения точного решения и рассмотрены примеры.

Ключевые слова: Уравнение Келдыша задача Дирихле-Неймана, преобразование Фурье, обобщенные функции медленного роста, полигармонические функции.

EXACT SOLUTIONS OF A MIXED DIRICHLET-NEUMANN BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR A BOUNDARY-DEGENERATING ELLIPTIC KELDYSH-TYPE EQUATION IN A LAYER

Algazin O. D.

Bauman Moscow State Technical University,

Moscow, Russia

Abstract

A mixed Dirichlet-Neumann boundary value problem is considered for a nonhomogeneous Keldysh-type equation in a layer $x \in \mathbb{R}^n, 0 < y < a$, where the equation is elliptic and degenerates parabolically on the boundary $y = 0$. Using the Fourier transform, it is shown that this problem has a unique solution in the class of functions of slow growth in x if the right-hand side of the equation and the right-hand sides of the boundary conditions are functions of slow growth, such as polynomials. Exact solutions are constructed for the case where the right-hand side of the equation and the right-hand sides of the boundary conditions are polyharmonic functions. An algorithm for constructing an exact solution is presented, and examples are considered.

Key words: Keldysh equation, Dirichlet-Neumann problem, Fourier transform, generalized functions of slow growth, polyharmonic functions.

Введение

В статье рассматривается уравнение

$$\Delta_x\big(u(x,y)\big) + yu_{yy}(x,y) = f(x,y), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad 0 < y < a,$$

где Δ_x −оператор Лапласа,

$$\Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}, \qquad x = (x_1, \dots, x_n).$$

Это уравнение эллиптического типа в полупространстве $y > 0$, гиперболического типа в полупространстве $y < 0$ и параболически вырождается на гиперплоскости $y = 0$.

В случае $n = 1$ получаем неоднородное уравнение типа Келдыша

$$u_{xx} + yu_{yy} = f.$$

В работе [1] М.В.Келдыш рассмотрел уравнение

$$u_{xx} + y^m u_{yy} + a(x,y)u_y + b(x,y)u_x + c(x,y)u = 0 \quad (c(x,y) \le 0).$$

Для области, расположенной в верхней полуплоскости и имеющей в составе своей границы отрезок оси x, он доказал условия разрешимости задачи Дирихле с непрерывными данными на границе. Приложения таких уравнений описаны в [2],[3]. Уравнениям смешанного типа и поиску точных решений посвящено много работ, см. например [4]-[9].

Данная работа посвящена отысканию точных решений задачи Дирихле-Неймана для неоднородного уравнения типа Келдыша (1) в слое для случая, когда правая часть уравнения и правые части граничных условий являются полигармоническими функциями. Приведен алгоритм построения точного решения и рассмотрены примеры. Решение этой задачи Дирихле-Неймана единственно в классе функций медленного роста.

Задача Дирихле для уравнения типа Келдыша в полупространстве $y > 0$ рассмотрена в [10].

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение типа Келдыша в слое

$$\Delta_x\big(u(x,y)\big) + yu_{yy}(x,y) = f(x,y), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad 0 < y < a, \qquad (1)$$

где Δ_x −оператор Лапласа,

$$\Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\,, \qquad x = (x_1, \dots, x_n).$$

На границе слоя зададим краевые условия Дирихле-Неймана

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad u_y(x,a) = \psi(x)\,. \qquad (2)$$

Здесь

$$u(x,0) = \lim_{y\to 0+0} u(x,y)\,, \qquad u_y\,(x,a) = \lim_{y\to a-0} u_y(x,y)\,.$$

Решение задачи Дирихле-Неймана будем искать в классе функций медленного роста по x:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,y)|\,(1+|x|)^{-m}dx < C$$

для некоторого $m \geq 0$ и для каждого $y \in (a,b)$.

Правые части уравнения (1) и краевых условий (2) $f(x,y)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ также будем считать функциями медленного роста по x.

Эту задачу можно свести к случаю однородного уравнения или однородных граничных условий.

Если $\tilde{u}(x,y)$ − некоторое решение медленного роста по x уравнения типа Келдыша (1), то для функции $v(x,y) = u(x,y) - \tilde{u}(x,y)$ получаем однородное уравнение

$$\Delta_x u + yu_{yy} = 0, \quad 0 < y < a, \qquad (3)$$

и краевые условия Дирихле-Неймана

$$v(x,a)=\varphi_1(x), \qquad v_y(x,b)=\psi_1(x) \tag{4}$$

где $\varphi_1(x)=\varphi(x)-\tilde{u}(x,a), \psi_1(x)=\psi(x)-\tilde{u}_y(x,b)$ тоже функции медленного роста по x.

Если $z(x,y)-$ некоторая функция медленного роста по x, удовлетворяющая краевым условиям (2), то для функции $v(x,y)=u(x,y)-z(x,y)$ получаем неоднородное уравнение

$$\Delta_x v+yv_{yy}=f_1(x,y), \quad 0<y<a, \tag{5}$$

где $f_1(x,y)=f(x,y)-\Delta_x z-yz_{yy}$ тоже функции медленного роста по x и однородные краевые условия

$$v(x,0)=0, \qquad v_y(x,a)=0. \tag{6}$$

2.Решение задача Дирихле-Неймана для слоя

Рассмотрим слой $0<y<a$, в котором уравнение типа Келдыша эллиптично и параболически вырождается на граничной гиперплоскости $y=0$. Поскольку решение задачи Дирихле-Неймана для неоднородного уравнения сводится к решению задачи Дирихле-Неймана для однородного уравнения, рассмотрим задачу Дирихле-Неймана для однородного уравнения .

$$\Delta_x\big(u(x,y)\big)+yu_{yy}(x,y)=0, \qquad x\in\mathbb{R}^n, \qquad 0<y<a, \tag{7}$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \ \ u_y(x,a)=\psi(x), \tag{8}$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)-$ функции медленного роста.

Поскольку функции $u(x,y)$ медленного роста по x определяют для каждого y из $(0,a)$ регулярные функционалы из пространства $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)-$пространства обобщенных функций медленного роста, то к ним можно применить преобразование Фурье по x [11]:

$$\mathcal{F}_x[u(x,y)](t,y) = U(t,y).$$

Применим преобразование Фурье по x к уравнению (7) и краевым условиям (8). Получим краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с параметром $t \in \mathbb{R}^n$, $|t| = (t_1^2 + \cdots + t_n^2)^{1/2}$,

$$-|t|^2 U(t,y) + yU_{yy}(t,y) = 0,\ 0 < y < a \qquad (9)$$

и краевые условия

$$U(t,0) = \Phi(t), \qquad U_y(t,a) = \Psi(t). \qquad (10)$$

Общее решение уравнения (9) запишется через функции Бесселя в виде

$$U(t,y) = c_1(t)\sqrt{y}I_1(2|t|\sqrt{y}) + c_2(t)\sqrt{y}K_1(2|t|\sqrt{y}).$$

Используя краевые условия (10), получим единственное решение краевой задачи (9), (10)

$$U(t,y) = K(t,y)\Phi(t) + L(t,y)\Psi(t), \qquad (11)$$

где

$$K(t,y) = \frac{2|t|\sqrt{y}\left(I_1\left(2|t|\sqrt{y}\right)K_0\left(2|t|\sqrt{a}\right) + I_0\left(2|t|\sqrt{y}\right)K_1\left(2|t|\sqrt{a}\right)\right)}{I_0\left(2|t|\sqrt{a}\right)},$$

$$L(t,y) = \frac{\sqrt{y}I_0(2|t|\sqrt{y})}{tI_0(2|t|\sqrt{a})}.$$

Применяя обратное преобразование Фурье, получим единственное в классе функций медленного роста решение задачи Дирихле-Неймана (7),(8) в виде свертки

$$u(x,y) = k(x,y) * \varphi(x) + l(x,y) * \psi(x), \qquad (12)$$

где

$$k(x,y) = \mathcal{F}_t^{-1}\big(K(t,y)\big),\ \ l(x,y) = \mathcal{F}_t^{-1}\big(L(t,y)\big).$$

$K(t,y)$ и $L(t,y)$ как функции переменного t бесконечно дифференцируемые и быстро убывающие, то есть принадлежат пространству $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, а, следовательно, и $k(x,y)$ и $l(x,y)$ как функции переменного x принадлежат пространству $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, поскольку преобразование Фурье переводит $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ в себя. Поэтому свертки (12), где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ принадлежат пространству $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, существуют.

Точные решения можно получить в явном виде в случае, когда правая часть уравнения (1) - функция $f(x,y)$ является полигармонической по x, то есть существует такое натуральное число N, что $\Delta_x^N f(x,y) = 0$, и $f(x,y)$ интегрируема по y в $(0,a)$ и функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ из правых частей граничных условий (2) также являются полигармоническими. В частности, если $\varphi(x), \psi(x), f(x,y)$ - полиномы.

Поскольку решение задачи Дирихле-Неймана (1),(2) сводится к решению задачи Дирихле-Неймана с однородными граничными условиями, рассмотрим задачу

$$\Delta_x\big(u(x,y)\big) + y u_{yy}(x,y) = f(x,y), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad 0 < y < a, \qquad (13)$$

$$u(x,0) = 0,\ \ u_y(x,a) = 0, \qquad (14)$$

где $f(x,y)$ интегрируема по y в $(0,a)$ и $\Delta_x^N f(x,y) = 0$ для некоторого N, в частности $f(x,y)$ является полиномом по переменным x и y.

Обозначим

$$\Delta_x + y\frac{\partial^2}{\partial y^2} = B + A,$$

где

$$B = \Delta_x, \qquad A = y\frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

также обозначим

$$A^{-1}(f) = \int_a^y \frac{y-\xi}{\xi} f(x,\xi)d\xi - \int_0^a f(x,\xi)d\xi.$$

Решением задачи (13), (14) будет функция

$$u(x,y) = \left(\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n A^{-1}(BA^{-1})^n\right)(f) \qquad (15)$$

Действительно,

$$(B+A)\left(\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n A^{-1}(BA^{-1})^n\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n (BA^{-1})^n + \sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n (BA^{-1})^{n+1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n (BA^{-1})^n + \sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1} (BA^{-1})^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n (BA^{-1})^n - \sum_{n=1}^{N}(-1)^n (BA^{-1})^n = I - (-1)^N (BA^{-1})^N = I,$$

где I – тождественный оператор.

То есть функция (15) является решением уравнения (13). Поскольку

$$A^{-1}(f)(x,0) = 0 \text{ и } \frac{\partial}{\partial y}A^{-1}(f)(x,a) = 0,$$

то функция (15) удовлетворяет граничным условиям (14).

Пример 1.

Рассмотрим задачу Дирихле-Неймана для неоднородного уравнения типа Келдыша

$$\Delta_x u + y u_{yy} = 3x_1 x_2^3 \ln(y), \qquad x \in \mathbb{R}^2, \qquad 0 < y < 1,$$

$$u(x,0) = x_1^3 x_2, \qquad u_y(x,1) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^2.$$

Возьмем

$$z(x,y) = x_1^3 x_2,$$

для функции $v(x,y) = u(x,y) - z(x,y)$ получим задачу

$$\Delta_x v + y v_{yy} = f(x,y), \qquad x \in \mathbb{R}^2, \qquad 0 < y < 1,$$

$$f(x,y) = 2x_1^2 x_2 \ln(y) - 6x_1 x_2$$

$$v(x,0) = 0, \qquad v_y(x,1) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^2.$$

Единственным решением задачи в классе функций медленного роста по x будет функция

$$u(x,y) = z(x,y) + v(x,y) = z(x,y) + A^{-1}(f) - A^{-1}\big(BA^{-1}(f)\big),$$

так как $\Delta_x^2 f(x,y) = 0$.

Для вычислений можно использовать *Maple* или *Mathematica*. Проведя вычисления, получим

$$u(x,y) = x_1^3 x_2 + \frac{3}{2} x_1^3 x_2 y \ln^2(y) - 3x_1^3 x_2 y \ln(y) + 3x_1^3 x_2 y - 6x_1 x_2 y \ln(y) +$$

$$+60x_1 x_2 y - \frac{9}{2} x_1 x_2 y^2 \ln^2(y) + \frac{45}{2} x_1 x_2 y^2 \ln(y) - \frac{153}{4} x_1 x_2 y^2.$$

Пример 2.

$$\Delta_x u + y u_{yy} = x_1 \sin(x_1)\, e^{x_2}\cos(\mathrm{y}), \qquad x \in \mathbb{R}^2, \qquad 0 < y < 1,$$

$$u(x,0) = 0, \qquad u_y(x,1) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^2.$$

Поскольку правая часть уравнения $f(x,y) = x_1 \sin(x_1)\, e^{x_2}\cos(\mathrm{y})$ удовлетворяет условию $\Delta_x^2 f(x,y) = 0$, то решением задачи будет функция

$$u(x,y) = A^{-1}(f) - A^{-1}\big(BA^{-1}(f)\big) =$$

$$= e^{x_2}(\mathrm{Ci}(1)\cos(x_1)\, y^2 - \cos(x_1)\, y^2 \mathrm{Ci}(y) - \mathrm{Ci}(1) x_1 \sin(x_1)\, y +$$

$$+ x_1 \sin(x_1)\, y\, \mathrm{Ci}(y) - 2\mathrm{Si}(1)\cos(x_1)\, y - 2\sin(1)\cos(x_1)\, y +$$

$$+ 2\cos(x_1)\, y \mathrm{Si}(y) + \cos(x_1)\, y \sin(y) - x_1 \sin(x_1)\sin(y) +$$

$$+ \cos(x_1)\cos(y) - \cos(x_1)).$$

Правая часть уравнения $f(x,y) = x_1 \sin(x_1)\, e^{x_2}\cos(\mathrm{y})$ не является функцией медленного роста по x и полученное решение $u(x,y)$ не является функцией медленного роста по x и в этом классе функций оно не единственно, к нему можно прибавить любое решение однородной задачи (в классе функций медленного роста по x однородная задача имеет только тривиальные решения):

$$\Delta_x u + y u_{yy} = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^2, \qquad 0 < y < 1,$$

$$u(x,0) = 0, \qquad u_y(x,1) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^2.$$

Например, можно прибавить любое решение вида

$$\mathrm{sh}(\nu_1 x_1)\mathrm{sh}(\nu_2 x_2)\sqrt{y}\, J_1\big(2\lambda\sqrt{y}\big),$$

где λ – любой положительный корень уравнения $J_0(2\lambda) = 0$, а ν_1 и ν_2 – любые действительные числа, удовлетворяющие условию $\nu_1^2 + \nu_2^2 = \lambda^2$. Однако при небольшой погрешности при вычислении λ эта функция не будет

приближенным решением однородной задачи, так как правые части уравнения и граничных условий будут бесконечно большими.

Заключение

Получены точные решения задачи Дирихле-Неймана в многомерном слое

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1}\colon\ x \in \mathbb{R}^n, \qquad 0 < y < a\}$$

для неоднородного уравнения типа Келдыша с правой частью являющейся полигармонической функцией по x и полигармоническими правыми частями граничных условий. Решение задачи единственно в классе функций медленного роста по x.

Библиографический список

1. Келдыш М.В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области // ДАН СССР. 1951. т.77, №2 . С. 81-83.

2. Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. - М.:Изд. Иностранной литературы, 1961. 208 с.

3. Otway T.H. Dirichlet Problem for Elliptic-Hyperbolic Equations of Keldych Type. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2012. 214 p.

4. Бицадзе А.В. Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа в смешанных областях//ДАН . 1958. Т.122. №2. С. 167-170

5. Нахушев А.Н. Критерий единственности задачи Дирихле для уравнения смешанного типа в цилиндрической области//Дифференциальные уравнения. 1970. Т.6. №1. С. 190-191.

6. Ruzhansky M., Torebek B. T., Turmetov B. Well-posedness of Tricomi–Gellerstedt–Keldysh-type fractional elliptic problems //Journal of Integral Equations and Applications. 2022. Т.4. №.3. С. 373-387.

7. Nytrebych Z. M. The differential-symbol method of solving the problem with local two-point in time conditions for a partial differential equation //Journal of Mathematical Sciences. 2021. Т. 254. №. 3. С. 406-415.
8. Zhang X. Generalized Tikhonov regularization method for an inverse boundary value problem of the fractional elliptic equation //Boundary Value Problems. 2024. Т. 2024. №. 1. С. 80.
DOI: 10.1186/s13661-024-01887-7
9. Simeonidis E. Spaces of K-modified harmonic polynomials//Revue Romaine Mathematicues Pures Appliquees. 2024. LXXIX(3-4). С. 575-583.
DOI: 10.59277/RRMPA.2024.575.583
10. Алгазин О.Д. Построение методом подобия фундаментального решения задачи Дирихле для уравнения типа Келдыша в полупространстве//Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Сер. Естественные науки.2018. №1.С.4-15. DOI: 10.18698/1812-3368-2018-1-4-15
11. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. - М.: Наука, 1979. 318 с.