УДК 517.958

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТРИКОМИ СО СПЕЦИАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ В МНОГОМЕРНОМ СЛОЕ

Алгазин О.Д.

кандидат физико-математических наук, доцент

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)

Москва, Россия

Аннотация

Рассмотрена краевая задача Дирихле для неоднородного уравнения типа Трикоми в слое. Показано что эта задача для слоя в области эллиптичности уравнения имеет единственное решение в классе функций медленного роста, если правая часть уравнения и правые части граничных условий являются функциями медленного роста, например, полиномами. Если слой лежит в области, где уравнение имеет смешанный тип, то решение не единственно. В том случае, когда правая часть уравнения и правые части граничных условий являются полигармоническими функциями, построены точные решения. Приведен алгоритм построения точного решения и рассмотрены примеры.

Ключевые слова: Уравнение Трикоми, задача Дирихле, преобразование Фурье, обобщенные функции медленного роста, полигармонические функции.

EXACT SOLUTIONS OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE GENERALIZED TRICOMI EQUATION WITH A SPECIAL RIGHT-HAND SIDE IN A MULTIDIMENSIONAL LAYER

Algazin O.D.

Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor

Bauman Moscow State Technical University

Moscow, Russia

Abstract

A Dirichlet boundary value problem for an inhomogeneous Tricomi-type equation in a layer is considered. It is shown that this problem for a layer in the elliptic domain of the equation has a unique solution in the class of functions of slow growth if the right-hand side of the equation and the right-hand sides of the boundary conditions are functions of slow growth, such as polynomials. If the layer lies in a domain where the equation is of mixed type, then the solution is not unique. In the case where the right-hand side of the equation and the right-hand sides of the boundary conditions are polyharmonic functions, exact solutions are constructed. An algorithm for constructing an exact solution is presented, and examples are considered.

Keywords: Tricomi equation, Dirichlet problem, Fourier transform, generalized functions of slow growth, polyharmonic functions.

Введение

В статье рассматривается уравнение

$$y\Delta_x\big(u(x,y)\big) + u_{yy}(x,y) = f(x,y), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad a < y < b, \qquad (1)$$

где Δ_x −оператор Лапласа,

$$\Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\,, \qquad x = (x_1, \dots, x_n).$$

Это уравнение эллиптического типа в полупространстве $y > 0$, гиперболического типа в полупространстве $y < 0$ и параболически вырождается на гиперплоскости $y = 0$.

В случае $n = 1$ получаем неоднородное уравнение Трикоми

$$yu_{xx} + u_{yy} = f,$$

которое впервые было рассмотрено Ф.Трикоми [9] и в дальнейшем получило его имя. Уравнения смешанного типа применяются в трансзвуковой газовой динамике [2],[3],[10]. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа в смешанной области, вообще говоря, поставлена некорректно [4]. Поиску условий корректности постановки задачи Дирихле для уравнения смешанного типа в смешанной области посвящено много работ, например [6],[7],[8],[11].

Данная работа посвящена отысканию точных решений задачи Дирихле для неоднородного уравнения Трикоми в слое для случая, когда правая часть уравнения и правые части граничных условий являются полигармоническими функциями. Приведен алгоритм построения точного решения и рассмотрены примеры. Если слой лежит в области эллиптичности уравнения, то это решение единственно в классе функций медленного роста. Если слой лежит в смешанной области, то решение задачи Дирихле не единственно в классе функций медленного роста.

1. Постановка задачи

Рассмотрим обобщенное уравнение Трикоми в слое

$$y\Delta_x\big(u(x,y)\big) + u_{yy}(x,y) = f(x,y), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad a < y < b, \tag{1}$$

где Δ_x −оператор Лапласа,

$$\Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\,, \qquad x = (x_1, \dots, x_n).$$

На границе слоя зададим краевые условия Дирихле

$$u(x,a) = \varphi(x), \qquad u(x,b) = \psi(x)\,. \tag{2}$$

Здесь

$$u(x,a) = \lim_{y \to a+0} u(x,y)\,, \qquad u_y(x,b) = \lim_{y \to b-0} u_y(x,y)\,.$$

Решение задачи Дирихле будем искать в классе функций медленного роста по x:

$$\int_{\mathbb{R}} |u(x,y)|\,(1+|x|)^{-m} dx < C$$

для некоторого $m \geq 0$ и для каждого $y \in (a,b)$.

Правые части уравнения (1) и краевых условий (2) $f(x,y)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ также будем считать функциями медленного роста по x.

Эту задачу можно свести к случаю однородного уравнения или однородных граничных условий.

Если $\tilde{u}(x,y)-$ некоторое решение медленного роста по x обобщенного уравнения Трикоми (1), то для функции $v(x,y)=u(x,y)-\tilde{u}(x,y)$ получаем однородное уравнение

$$y\Delta_x u+u_{yy}=0,\quad a<y<b, \tag{3}$$

и краевые условия Дирихле

$$v(x,a)=\varphi_1(x),\ v(x,b)=\psi_1(x) \tag{4}$$

где $\varphi_1(x)=\varphi(x)-\tilde{u}(x,a),\psi_1(x)=\psi(x)-\tilde{u}(x,b)$ тоже функции медленного роста по x.

Если $z(x,y)-$ некоторая функция медленного роста по x, удовлетворяющая краевым условиям (2), то для функции $v(x,y)=u(x,y)-z(x,y)$ получаем неоднородное уравнение

$$y\Delta_x v+v_{yy}=f_1(x,y),\quad a<y<b, \tag{5}$$

где $f_1(x,y)=\ f(x,y)-y\Delta_x z-z_{yy}$ тоже функции медленного роста по x и однородные краевые условия

$$v(x,a)=0,\qquad v(x,b)=0. \tag{6}$$

2.Задача Дирихле для слоя в области эллиптичности

Рассмотрим слой $0<y<b$, в котором обобщенное уравнение Трикоми эллиптично и параболически вырождается на граничной гиперплоскости $y=0$. Поскольку решение задачи Дирихле для неоднородного уравнения сводится к решению задачи Дирихле для однородного уравнения, рассмотрим задачу Дирихле для однородного уравнения .

$$y\Delta_x\big(u(x,y)\big)+u_{yy}(x,y)=0,\qquad x\in\mathbb{R}^n,\qquad 0<y<b, \tag{7}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \ u(x,b)=\psi(x), \tag{8}$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – функции медленного роста.

Поскольку функции $u(x, y)$ медленного роста по x определяют для каждого y из $(0, b)$ регулярные функционалы из пространства $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ –пространства обобщенных функций медленного роста, то к ним можно применить преобразование Фурье по x [5]:

$$\mathcal{F}_x[u(x, y)](t, y) = U(t, y).$$

Применим преобразование Фурье по x к уравнению (7) и краевым условиям (8). Получим краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с параметром $t \in \mathbb{R}^n$, $|t| = (t_1^2 + \cdots + t_n^2)^{1/2}$,

$$-|t|^2 yU(t, y) + U_{yy}(t, y) = 0, \qquad 0 < y < b \tag{9}$$

и краевые условия

$$U(t, 0) = \Phi(t), \qquad U(t, b) = \Psi(t). \tag{10}$$

Уравнение (9) подстановкой $\eta = |t|^{2/3} y$ сводится к уравнению Эйри

$$U_{\eta\eta} - \eta U = 0,$$

общее решение которого записывается через функции Эйри

$$U = C_1 \mathrm{Ai}(\eta) + C_2 \mathrm{Bi}(\eta).$$

Общее решение уравнения (9) запишется в виде

$$U(t, y) = c_1(t)\mathrm{Ai}\big(|t|^{2/3} y\big) + c_2(t)\mathrm{Bi}\big(|t|^{2/3} y\big).$$

Используя краевые условия (10), получим единственное решение краевой задачи (9), (10)

$$U(t, y) = K(t, y)\Phi(t) + L(t, y)\Psi(t), \tag{11}$$

где

$$K(t, y) = \frac{\mathrm{Ai}\big(|t|^{2/3} y\big)\mathrm{Bi}\big(|t|^{2/3} b\big) - \mathrm{Bi}\big(|t|^{2/3} y\big)\mathrm{Ai}\big(|t|^{2/3} b\big)}{\mathrm{Ai}(0)\mathrm{Bi}(|t|^{2/3} b) - \mathrm{Bi}(0)\mathrm{Ai}(|t|^{2/3} b)},$$

$$L(t, y) = \frac{\mathrm{Ai}(0)\mathrm{Bi}\big(|t|^{2/3} y\big) - \mathrm{Bi}(0)\mathrm{Ai}\big(|t|^{2/3} y\big)}{\mathrm{Ai}(0)\mathrm{Bi}(|t|^{2/3} b) - \mathrm{Bi}(0)\mathrm{Ai}(|t|^{2/3} b)}.$$

Применяя обратное преобразование Фурье, получим единственное в классе функций медленного роста решение задачи Дирихле (7),(8) в виде свертки

$$u(x,y) = k(x,y) * \varphi(x) + l(x,y) * \psi(x), \tag{12}$$

где

$$k(x,y) = \mathcal{F}_t^{-1}\big(K(t,y)\big),\ \ l(x,y) = \mathcal{F}_t^{-1}\big(L(t,y)\big).$$

$K(t,y)$ и $L(t,y)$ как функции переменного t бесконечно дифференцируемые и быстро убывающие, то есть принадлежат пространству $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, а, следовательно, и $k(x,y)$ и $l(x,y)$ как функции переменного x принадлежат пространству $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, поскольку преобразование Фурье переводит $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ в себя. Поэтому свертки (12), где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ принадлежат пространству $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, существуют.

Точные решения можно получить в явном виде в случае, когда правая часть уравнения (1) - функция $f(x,y)$ является полигармонической по x, то есть существует такое натуральное число N, что $\Delta_x^N f(x,y) = 0$, и $f(x,y)$ интегрируема по y в (a,b) и функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ из правых частей граничных условий (2) также являются полигармоническими. В частности, если $\varphi(x), \psi(x), f(x,y)$ - полиномы. Решение задачи (1),(2) $u(x,y)$ в этом случае также будет полиномом. Случай $n = 1$ рассмотрен в [1].

Поскольку решение задачи Дирихле (1),(2) сводится к решению задачи Дирихле с однородными граничными условиями, рассмотри м задачу

$$y\Delta_x\big(u(x,y)\big) + u_{yy}(x,y) = f(x,y), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad 0 < y < b, \tag{13}$$

$$u(x,0) = 0,\ \ u(x,b) = 0, \tag{14}$$

где $f(x,y)$ интегрируема по y в (a,b) и $\Delta_x^N f(x,y) = 0$ для некоторого N, в частности $f(x,y)$ является полиномом по переменным x и y.

Обозначим

$$y\Delta_x + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = B + A,$$

где

$$B = y\Delta_x, \qquad A = \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

также обозначим

$$A^{-1}(f) = \int_0^y (y-\xi) f(x,\xi) d\xi - \frac{y}{b}\int_0^b (b-\xi) f(x,\xi) d\xi.$$

Решением задачи (13), (14) будет функция

$$u(x,y) = \left(\sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n A^{-1}(BA^{-1})^n \right)(f) \tag{15}$$

Действительно,

$$(B+A)\left(\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n A^{-1}(BA^{-1})^n\right) = \sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n (BA^{-1})^n + \sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n (BA^{-1})^{n+1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n (BA^{-1})^n + \sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1} (BA^{-1})^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n (BA^{-1})^n - \sum_{n=1}^{N}(-1)^n (BA^{-1})^n = I - (-1)^N (BA^{-1})^N = I,$$

где $I -$ тождественный оператор.

То есть функция (15) является решением уравнения (13). Поскольку

$$A^{-1}(f)(x,0) = 0 \ \text{ и } \ A^{-1}(f)(x,b) = 0,$$

то функция (15) удовлетворяет граничным условиям (14).

Пример 1.

Рассмотрим задачу Дирихле для неоднородного уравнения Трикоми

$$y\Delta_x u + u_{yy} = 2x_1^2 x_2 \ln(y), \qquad x \in \mathbb{R}^2, \qquad 0 < y < 1,$$

$$u(x,0) = x_1 x_2^2, \qquad u(x,1) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^2.$$

Возьмем

$$z(x,y) = x_1 x_2^2 (1-y),$$

для функции $v(x,y) = u(x,y) - z(x,y)$ получим задачу

$$y\Delta_x v + v_{yy} = f(x,y), \qquad x \in \mathbb{R}^2, \qquad 0 < y < 1,$$

$$f(x,y) = 2x_1^2 x_2 \ln(y) - 2x_1 y(1-y)$$

$$v(x,0) = 0, \qquad v(x,1) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^2.$$

Поскольку $\Delta_x^2 f(x,y) = 0$, то решением задачи будет функция

$$u(x,y) = z(x,y) + v(x,y) = z(x,y) + A^{-1}(f) - A^{-1}\big(BA^{-1}(f)\big).$$

Эти вычисления легко выполняются в *Maple* или в *Mathematica*.

Единственное в классе функций медленного роста по x решение задачи

$$u(x,y) = -\frac{1}{10}x_2 y^5 \ln(y) + x_1^2 x_2 y^2 \ln(y) + \frac{39}{200}x_2 y^5 - \frac{3}{2}x_1^2 x_2 y^2 + \frac{1}{6}x_1 y^4 - \frac{1}{4}x_2 y^4 +$$

$$+\frac{3}{2}x_1^2 x_2 y - x_1 x_2^2 y - \frac{1}{3}x_1 y^3 + x_1 x_2^2 + \frac{1}{6}x_1 y + \frac{11}{200}x_2 y.$$

3. Задача Дирихле для слоя в смешанной области.

Рассмотрим слой $-a < y < a$, в котором уравнение Трикоми имеет смешанный тип:

$$y\Delta_x\big(u(x,y)\big) + u_{yy}(x,y) = f(x,y), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad -a < y < a, \tag{16}$$

$$u(x,-a) = \varphi(x), \;\; u(x,a) = \psi(x), \tag{17}$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x), f(x,y) -$ полигармонические функции по x и $f(x,y)$ интегрируема по y в $(-a,a)$.

Поскольку эта задача сводится к задаче с однородными граничными условиям , то будем считать, что

$$u(x,-a) = 0, \;\; u(x,a) = 0, \tag{18}$$

Аналогично изложенному в предыдущем пункте, решением задачи Дирихле (16), (18) будет функция

$$u(x,y) = \left(\sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n A^{-1}(BA^{-1})^n\right)(f), \tag{19}$$

где $\Delta_x^N f(x,y) = 0$ и

$$A^{-1}(f) = \int_{-a}^{y} (y-\xi) f(x,\xi) d\xi - \frac{y+a}{2a} \int_{-a}^{a} (a-\xi) f(x,\xi) d\xi.$$

Пример 2.

Рассмотрим задачу Дирихле для неоднородного уравнения Трикоми

$$y\Delta_x u + u_{yy} = 2x_1^2 x_2 e^{-y^2}, \qquad x \in \mathbb{R}^2, -1 < y < 1,$$

$$u(x,-1) = x_1 x_2^2, \qquad u(x,1) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^2.$$

Возьмем

$$z(x,y) = \frac{1}{2} x_1 x_2^2 (1-y),$$

для функции $v(x,y) = u(x,y) - z(x,y)$ получим задачу

$$y\Delta_x v + v_{yy} = f(x,y), \qquad x \in \mathbb{R}^2, -1 < y < 1,$$

$$f(x,y) = 2x_1^2 x_2 e^{-y^2} - x_1 y(1-y)$$

$$v(x,0) = 0, \qquad v(x,1) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^2.$$

Поскольку $\Delta_x^2 f(x,y) = 0$, то решением задачи будет функция

$$u(x,y) = z(x,y) + v(x,y) = z(x,y) + A^{-1}(f) - A^{-1}\big(BA^{-1}(f)\big) =$$

$$= -\frac{\sqrt{\pi}}{6} x_2 y^4 \operatorname{erf}(y) + \frac{\sqrt{\pi}}{3} \operatorname{erf}(1)\, x_2 y^3 - \frac{1}{4e} x_2 y + \frac{\sqrt{\pi}}{8} x_2 \operatorname{erf}(y) + \frac{1}{3e} x_2 y^3$$
$$- \frac{1}{6} x_2 y^3 e^{-y^2} +$$

$$+\frac{1}{12}x_2ye^{-y^2}-\frac{1}{12}x_1-\frac{7\sqrt{\pi}}{24}\operatorname{erf}(1)\,x_2-\sqrt{\pi}\operatorname{erf}(1)\,x_1^2x_2+\frac{1}{12}x_1y^4-\frac{1}{6}x_1y^3+$$

$$+\sqrt{\pi}x_1^2x_2y\operatorname{erf}(y)-\frac{1}{e}x_1^2x_2+\frac{1}{6}x_1y-\frac{1}{2}x_1x_2^2y+x_1^2x_2e^{-y^2}+\frac{1}{2}x_1x_2^2.$$

Если искать решение задачи Дирихле для полосы $-a<y<a$ в классе функций медленного роста по x, то решение не единственно. К найденному решению можно прибавить любое решение медленного роста однородной задачи, например

$$g(x)\big(\operatorname{Bi}(\mu_k y)\operatorname{Ai}(-\mu_k a)-\operatorname{Ai}(\mu_k y)\operatorname{Bi}(-\mu_k a)\big),$$

где μ_k – любой положительный корень уравнения

$$\operatorname{Ai}(-\mu a)\operatorname{Bi}(\mu a)-\operatorname{Ai}(\mu a)\operatorname{Bi}(-\mu a)=0, \qquad (20)$$

а $g(x)$ – любое решение медленного роста уравнения

$$\Delta g(x)+\mu_k^3 g(x)=0.$$

Например, $g(x)=\sin(\nu_1x_1)\sin(\nu_2x_2)$, $\nu_1^2+\nu_2^2=\mu_k^3$.

Приведем несколько первых положительных корней уравнения (20) при $a=1$ (приближенные значения)

$$\mu_1=2.340667730, \mu_2=4.087953380, \mu_3=5.520559835, \mu_4=6.786708090,$$

$$\mu_5=7.944133587.$$

Заключение

Получены точные решения задачи Дирихле в многомерном слое

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^{n+1}\colon\ x\in\mathbb{R}^n, \qquad a<y<b\}$$

для неоднородного обобщенного уравнения Трикоми с правой частью являющейся полигармонической функцией по x и полигармоническими правыми частями граничных условий. Если слой лежит в области эллиптичности уравнения, то решение задачи единственно в классе функций медленного роста по x.Если слой лежит в области, где уравнение имеет смешанный тип, то решение не единственно. Если правая чась уранения и правые части граничных условий являются полиномами, то и решение является полиномом.

Библиографический список

1. Алгазин О.Д. Полиномиальные решения задачи Дирихле для уравнения Трикоми в полосе//Математика и математическое моделирование.-2018. -№03. - С. 1-12.
DOI: 10.24108/mathm.0318.0000120
2. Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики.-М.:Изд. Иностранной литературы, 1961,- 208 с.
3. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. -М.: Наука, 1981.- 448 с.
4. Бицадзе А.В. Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа в смешанных областях//ДАН .- 1958.- Т.122.- №2.- С. 167-170
5. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. -М.: Наука, 1979. -318 с.
6. Нахушев А.Н. Критерий единственности задачи Дирихле для уравнения смешанного типа в цилиндрической области//Дифференциальные уравнения. -1970. -Т.6.- №1.- С. 190-191.
7. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области//ДАН. -2007.- Т.413.- №1.- С. 23-26.
8. Солдатов А.П. О задачах типа Дирихле для уравнения Лаврентьева-Бицадзе//Труды МИАН. -2012. -Т. 278.-- С. 242-249.
9. Tricomi F. Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di secondo ordine, di tipo misto// Rend. Reale Accad. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (5) **14** (1923), 134-247.
10. Франкль Ф.И. Избранные труды по газовой динамике. -М.: Наука, 1973,-712 с.
11. Хачев М.М. Первая краевая задача для линейных уравнений смешанного типа. -Нальчик: Эльбрус,- 1998.