

УДК 519.6

**ОПТИМИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ МЕЖОРБИТАЛЬНЫМ ПРЕЛЕТОМ
МАЛОГО КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА НА ИОННЫХ ДВИГАТЕЛЯХ С
ОРБИТЫ ЗЕМЛИ НА ОРБИТУ ЮПИТЕРА**

Мозжорина Т.Ю.

к.т.н., доцент,

*Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет),*

г. Москва, Россия

Вяленко А.В.

студент,

*Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет),*

г. Москва, Россия

Аннотация.

В представленной статье проводится расчетное исследование, посвященное проблеме межорбитального перелета малого космического аппарата на ионных двигателях с орбиты Земли на орбиту Юпитера. Исследование космических миссий к планетам Солнечной системы представляет собой одну из наиболее сложных и перспективных задач современной астронавтики. Данная работа основана на решении задачи оптимального управления с применением принципа максимума Понтрягина, который позволяет свести исходную проблему решения к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Математическая модель включает ряд допущений: орбиты планет лежат в одной плоскости, для орбиты Земли выбраны значения для осредненной круговой. Для орбиты Юпитера рассмотрены варианты: осредненная круговая, а также с уточнением для эллиптической по условиям афелия и перигелия. Притяжения планет не учитываются, мощность солнечных батарей неизменна. Космический

аппарат (КА) принимается за материальную точку. Для численного решения полученной краевой задачи выбран метод пристрелки. Разработанный алгоритм реализован на языке программирования C++. В заключительной части работы проведен детальный анализ полученных результатов, продемонстрирована возможность реализации подобных перелетов с использованием ионных двигателей.

Ключевые слова: полёт на Юпитер, ионные двигатели, задача оптимального управления, дифференциальные уравнения, численные методы, метод пристрелки, принцип максимума Понтрягина.

OPTIMIZATION OF CONTROL OF INTERORBITAL FLIGHT OF A SMALL ION-POWERED SPACECRAFT FROM EARTH'S ORBIT TO JUPITER'S ORBIT

Mozzhorina T.Yu.

Ph.D., assistant professor,

Bauman Moscow State Technical University,

Moscow, Russia

Vyalenko A.V.

student,

Bauman Moscow State Technical University,

Moscow, Russia

Abstract.

In the presented article, a computational study is conducted on the problem of interorbital flight of a small spacecraft powered by ion engines from Earth's orbit to Jupiter's orbit. The study of space missions to the planets of the Solar system is one of the most difficult and promising tasks of modern astronautics. This work is based on solving of the optimal control problem using the Pontryagin's maximum principle, which allows reducing the initial solution problem to a boundary value problem for a

system of ordinary differential equations. The mathematical model includes several assumptions: the planets' orbits lie in a single plane, and Earth's orbit is assumed to be circular. For Jupiter's orbit, the following options are considered: circular, with a refinement for elliptical orbits based on aphelion and perihelion conditions. The planetary gravity is ignored, and the solar panel power remains constant. The spacecraft is treated as a point mass. For the numerical solution of the obtained boundary value problem, the shooting method was chosen. The developed algorithm was implemented in the C++ programming language. In the final part of the work, a detailed analysis of the results was carried out, and the possibility of implementing such flights using ion engines was demonstrated.

Keywords: flight to Jupiter, ion thrusters, optimal control problem, differential equations, numerical methods, shooting method, Pontryagin's maximum principle.

Введение.

В данной работе рассматривается проблема моделирования и оптимизации перелёта малого космического аппарата с орбиты Земли на орбиту Юпитера с использованием ионных двигателей. Актуальность исследования обусловлена необходимостью разработки энергоэффективных методов для долговременных межпланетных перелётов, которые могли бы обеспечить высокую точность траекторий при минимальных затратах топлива, интерес к созданию которых остается неизменно высоким длительное время [1, 2, 4], [5, 6, 8]. Целью работы является решение задачи оптимального управления движением КА с использованием метода пристрелки с помощью численных методов, таких, как метод Рунге-Кутты 4-го порядка, LUP-разложение и модифицированный метод Ньютона [3, 7, 9, 10]. Практическая значимость работы заключается в возможности применения полученных результатов для планирования реальных космических миссий к Юпитеру и другим планетам, где использование ионных двигателей является наиболее целесообразным. Расчетный эксперимент

проводился не только для среднего значения орбиты Юпитера, но и для параметров, соответствующих точкам афелия и перигелия эллиптической орбиты.

Математическая постановка задачи. Подробный алгоритм сведения задачи ОУ к краевой задаче описан в работе [1, 6]. Математическая модель задачи оптимизации перелета с Земной орбиты на орбиту Юпитера с использованием принципа максимума Понтрягина представляет собой краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, состоящих из уравнений движения и сопряженной системы. Система уравнений движения согласно [2] имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{v^2}{R} - A_0 \cdot \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 + \frac{T_{омн}}{(1 - Q_{омн} \cdot t)} \cdot \sin(\theta) \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{uv}{R} + \frac{T_{омн}}{(1 - Q_{омн} \cdot t)} \cdot \cos(\theta) \\ \frac{dR}{dt} = u \\ \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{R} \end{cases}$$

где t – время, с; u – скорость движения ракеты вдоль радиуса, м/с; v – скорость движения ракеты по касательной к окружности с центром в Солнце, м/с; R – расстояние до Солнца, м; φ – полярный угол положения ракеты, рад; R_0 – радиус Земной орбиты, м; θ – угол между касательной к окружности с центром в Солнце и направлением тяги, рад, управление в поставленной задаче; $A_0 = \frac{F_0}{m_0} = G \frac{M_c}{R_0^2}$, м/с²; F_0 – сила гравитационного притяжения Солнца на расстоянии, равном среднему радиусу Земной орбиты, Н; m_0 – начальная масса КА, кг; G – гравитационная постоянная, м³/с²·кг; M_c – масса Солнца, кг;

$Q_{отн} = Q / m_0$ – отношение расхода топлива двигателя к исходной массе, сек^{-1} ;

$T_{отн} = T / m_0$ – отношение тяги двигателя к исходной массе, $\text{м} / \text{с}^2$.

Рассмотрим схематичное расположение орбит и космического корабля на ионных двигателях, поясняющее направления скоростей и отсчета углов, на рисунке 1:

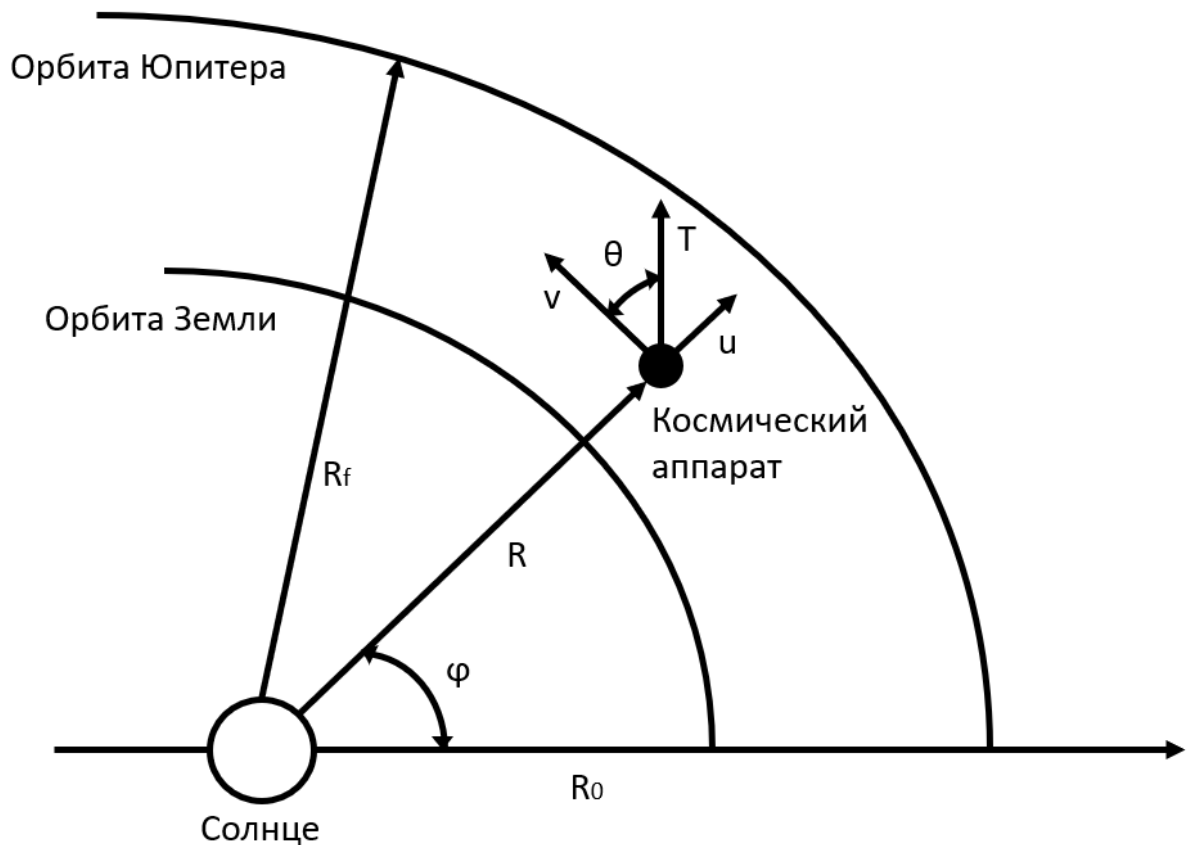


Рис. 1. Схема перелета между орбитами

Пояснение к системе уравнений движения Авторская разработка.

Функционал задачи ОУ: $J = \int_0^{t_1} dt = t_1 \rightarrow \min$, то есть решается задача

быстродействия. Функция Понтрягина в такой постановке задачи не линейна по управлению, поэтому из уравнения Эйлера по управлению в канонической форме

можно определить оптимальный угол θ действия тяги T . Отсюда:

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \sin \theta^* = \frac{\psi_u}{\sqrt{\psi_u^2 + \psi_v^2}}; \cos \theta^* = \frac{\psi_v}{\sqrt{\psi_u^2 + \psi_v^2}}.$$

Здесь H – функция Понтрягина (или Гамильтониан из вариационного исчисления и уравнений Эйлера в канонической форме), θ^* – оптимальный угол управления тягой ионного двигателя, ψ_u, ψ_v – сопряженные переменные, соответствующие первым двум уравнениям системы уравнений движения.

Численные методы, реализованные в программном комплексе. С помощью принципа максимума Понтрягина задача оптимального управления сводится к решению краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Краевая задача решалась методом пристрелки [7, 10]. В качестве параметров пристрелки выбираются недостающие начальные условия для сопряженных переменных ψ_u, ψ_v, ψ_R . Дополнительный параметр пристрелки — время перелета t_1 , начальное приближение которого выбирается как известное примерное время перелета с Земли на Юпитер, равное 600 дням. Интегрирование системы дифференциальных уравнений проводится методом Рунге-Кутты 4-го порядка с постоянным шагом, не превышающем во всех итерациях метода Ньютона 0,6 суток (задавалось 1000 шагов по времени перелета). Подбор неизвестных параметров пристрелки, которые удовлетворяют краевым условиям в конце перелета, осуществляется модифицированным методом Ньютона, в котором, как и в классическом методе, проводится линеаризация системы нелинейных алгебраических уравнений (уравнений невязок). Полученная СЛАУ решается методом LUP-разложения. Оптимизация шага в модифицированном методе Ньютона проводится по локальной норме [10]. Алгоритм был реализован на языке программирования C++.

Результаты расчетов. Результаты представлены, как в графическом виде, так и в виде основных данных, сведенных в таблицу. В таблице 1 содержатся

ключевые параметры для трех вариантов перелета между орбитами, различающихся заданием краевых условий в конце перелета: для средних значений скорости и радиуса орбиты Юпитера, для значений скорости и расстояния до афелия орбиты и для значений скорости и расстояния до перигелия. Также указано время оптимального перелета и процент затраченного на межорбитальный перелет топлива (от начальной массы космического аппарата на орбите Земли).

Таблица 1. Сравнение некоторых полученных данных оптимальных траекторий движения космического аппарата для трех различных случаев.

Варианты	Скорость на орбите Юпитера V , м/с	Расстояние от Солнца R , м	Время перелета t , сутки	Полярный угол, соответствующий перелету КА ϕ , рад	% топлива, затраченного на перелет
По средним параметрам круговой орбиты	13060	$7.785 \cdot 10^{11}$	477.882	3.26658	61.17
По точке перигелия орбиты Юпитера	12430	$8.165 \cdot 10^{11}$	490.226	3.27716	63.24
По точке афелия орбиты Юпитера	13710	$7.405 \cdot 10^{11}$	466.915	3.25841	60.23

Из приведенных данных таблицы 1 видно, что наименьшее время перелета достигается при выбранных краевых на правом конце по условиям перигелия орбиты Юпитера, необходимая относительная масса топлива на борту КА должна составлять при этом около 61% от начальной массы. В силу того, что орбита

Юпитера близка к круговой (эксцентриситет $e = 0,048775$), изменения физических параметров невелики.

На рисунках 2-7 представлено изменение основных физических параметров процесса. Радиальная скорость (рис.2) имеет характерное резкое изменение в районе 270-280 суток от начала перелета. Следует отметить, что по численным данным результатов расчетов на этот процесс уходит несколько суток, задача оптимального управления не вырождается в задачу с релейным переключением, хотя направление тяги изменяется достаточно быстро (рис. 6). Такого резкого изменения других фазовых переменных, таких как тангенциальная скорость, расстояние от Солнца и полярный угол не наблюдается (см. рис. 3, 4, 5), что связано с оптимальным направлением тяги на этом участке вдоль радиуса сначала от Солнца, потом в сторону Солнца (рис. 6).



Рис.2. Изменение радиальной скорости в оптимальном процессе.

Авторская разработка.

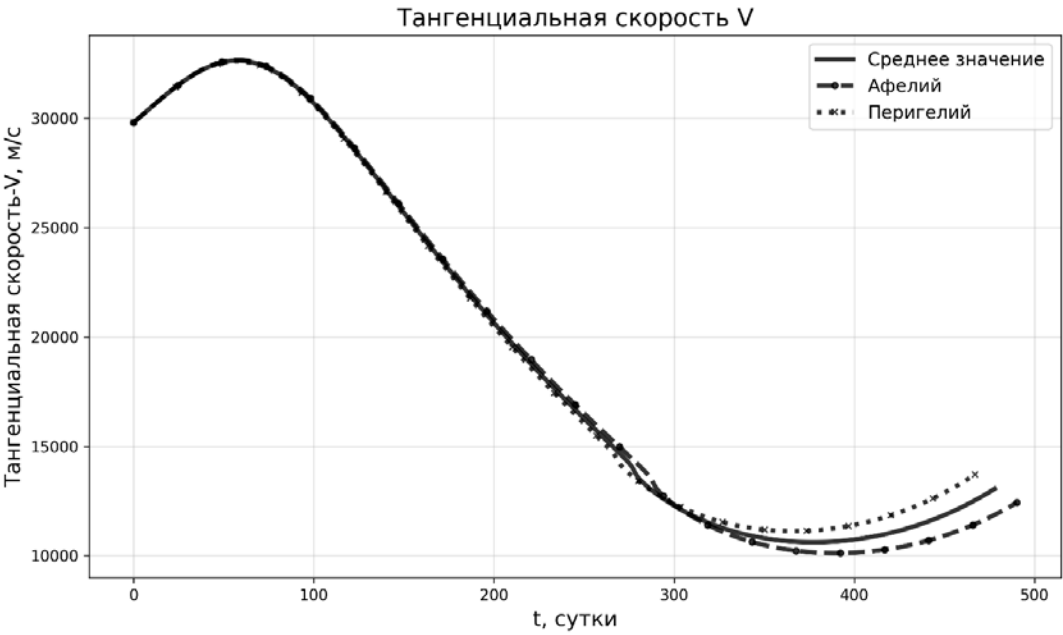


Рис.3. Изменение тангенциальной скорости в оптимальном процессе.

Авторская разработка.

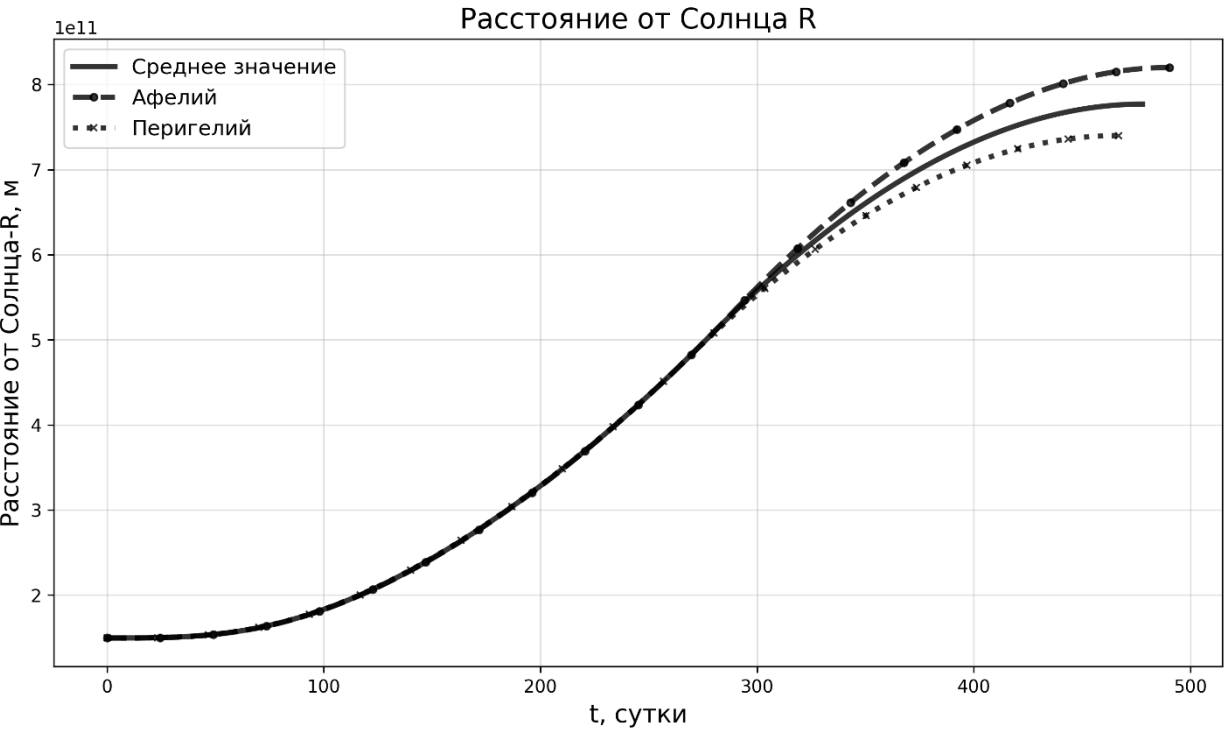


Рис.4. Изменение расстояния от КА до Солнца в оптимальном процессе.

Авторская разработка.

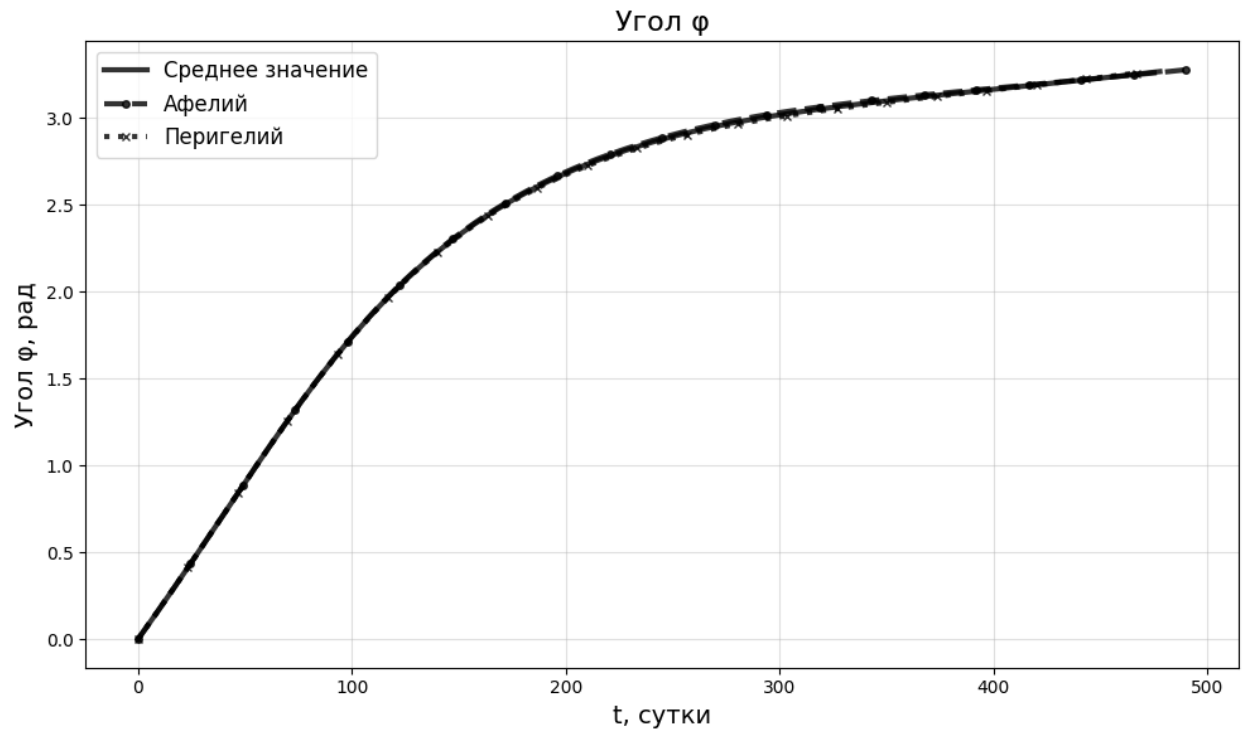


Рис. 5. Изменение полярного угла в оптимальном процессе.

Авторская разработка.

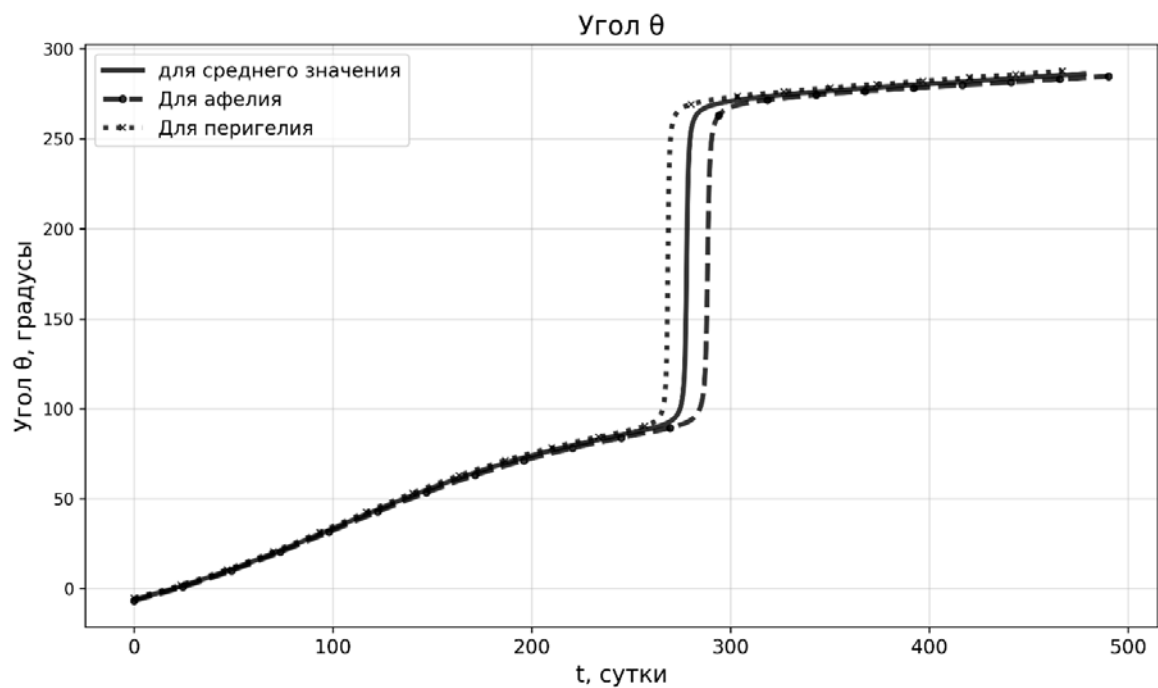


Рис. 6. Оптимальное управление, угол действия тяги двигателей КА.

Авторская разработка.

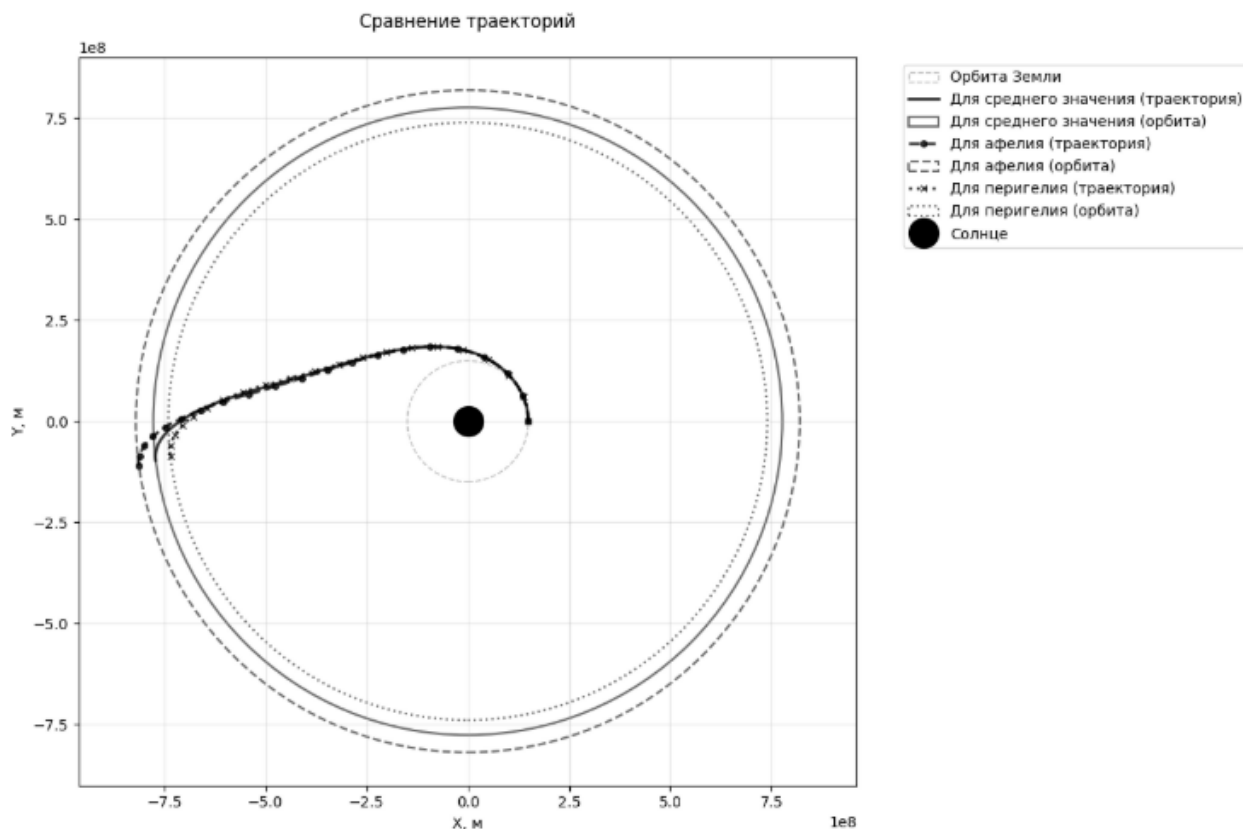


Рис. 7. Траектории движения КА в Солнечной системе в оптимальных процессах исследованных вариантов.

Авторская разработка.

Анализ траекторий оптимального перелета по критерию быстродействия (см. рис.7) позволяет сделать вывод, что мощности ионных двигателей хватает для перелета в достаточно большой области по почти прямолинейной траектории. На рис.7 окружности, соответствующие расстояниям до афелия и перигелия, показывают возможное положение этих точек орбиты Юпитера вследствие прецессии.

Заключение. Проведенный численный эксперимент показал различия и сходства оптимального управления и физических параметров при выборе точки выхода на орбиту Юпитера. Представленные графики позволяют провести сравнительный анализ динамики параметров, оценить соответствие результатов физическим закономерностям, подтвердить корректность численных методов и

определить критические участки траектории (см. рис. 7). Сходимость метода Ньютона из-за резкого изменения управления примерно на 270 сутки полета не была нарушена, так как это происходило за несколько шагов метода Рунге-Кутты. (Известно, что модифицированный метод Ньютона теряет сходимость при решении задачи оптимального управления с переключением, если не применить некоторое усложнение алгоритма [10]). Форма и протяженность траекторий, изменение функции оптимального управления незначительно различаются в зависимости от расположения конечной точки полета на орбите Юпитера (см. рис. 6, 7). Расчеты показали, что наименьшее время перелета достигается при выбранных краевых на правом конце по условиям перигелия орбиты Юпитера.

Библиографический список.

1. Закуражная А.А. Моделирование и оптимизация управления полетом космического аппарата с Земли на орбиту Венеры с помощью ионных двигателей. / А.А. Закуражная, Т.Ю. Мозжорина // Математическое моделирование и численные методы. – 2022. – № 2 (34). С. 88-101.
2. Беллман, Р. Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета / под ред. Лейтмана Дж.; перев. с англ. Лурье К. А.; под ред. Троицкого В. А. - М.: Наука, 1965. - 538 с.
3. Деменков, Н. П. Оптимальное управление в классическом вариационном исчислении: учебное пособие / Н. П. Деменков. — Москва: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017. — 136 с.
4. Ивашкин, В. В. Оптимизация траекторий космического аппарата с электроракетным двигателем малой тяги / Ивашкин В. В., Крылов И. В. ; Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН. - М., 2020. - 32 с.: рис., табл. - (Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша; № 94 за 2020 г.). - Библиогр.: с. 31.
5. Левантовский, В. И. Механика полета к далеким планетам. - М.: Знание, 1974. - 64 с.

6. Мозжорина Т.Ю. Моделирование и оптимизация перелета спутников малой массы с Земной орбиты на орбиту Марса с помощью ионных двигателей. / Т.Ю. Мозжорина, Л.О. Чуванова // Математическое моделирование и численные методы. – 2021. – № 2, С. 54–67.

7. Моршнева И. В. Численное решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод стрельбы. / И. В. Моршнева, С. Н. Овчинникова. Методические указания для студентов 3 и 4 курсов мехмата. Ростов–на–Дону, УПЛ РГУ, 2003. – 29 с.

8. Музыченко Е.И., Синицын А.А. Оптимизация межпланетных перелетов Земля—Марс с комбинированным применением ДУ большой и малой тяги. // XLV академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королева и других выдающихся отечественных ученых – пионеров освоения космического пространства. Сборник тезисов в 4 т., Том 1. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2021. – С. 437-442.

9. Рачков, М. Ю. Оптимальное управление в технических системах: учебник для вузов / М. Ю. Рачков. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2025. — 120 с. — (Высшее образование).

10. Федоренко, Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления / Федоренко Р. П. - М.: Наука, 1978. - 486 с.: ил. - (Справочная математическая библиотека). - Библиогр.: с. 479-483.

Оригинальность 81%