УДК 519.85

СПОСОБЫ НАХОЖДЕНИЯ НЕДОМИНИРУЕМЫХ РЕШЕНИЙ

Киселев В.В.

к.т.н., доцент,

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана,

Москва, Россия

Аннотация

В статье рассматриваются методы поиска оптимальных решений при наличии структуры доминирования в пространстве критериев. Структура доминирования может быть задана лицом, принимающим решение, или возникать при решении задачи декомпозиции для определенного класса функций.

Ключевые слова: многокритериальная оптимизация, принятие решений, математическое программирование, декомпозиция моделей сложных систем.

WAYS TO FIND NON-DOMINANT SOLUTIONS

***Kiselev V. V*.**

Ph. D., associate Professor, Bauman

Moscow State Technical University,

Moscow, Russia

Annotation

The article discusses methods for finding optimal solutions in the presence of a structure of dominance in the criteria space. The dominance structure can be set by the decision-maker, or arise when solving the decomposition problem for a certain class of functions.

Keywords: multi-criteria optimization, decision-making, mathematical programming, decomposition of models of complex systems.

В экономических и технических задачах часто возникает необходимость нахождения недоминируемых решений. В экономике существует много задач, когда степень достижения цели невозможно представить одной величиной, существует многообразие целей. Такие задачи возникают, когда в результате производства получаются различные продукты, количества которых невозможно суммировать, или используются несколько факторов, количество которых невозможно выразить одной единицей измерения . В технике на этапе оптимального проектирования система оценивается по нескольким критериям, имеющим различные единицы измерения [8]. Кроме того, возможен случай, когда существует глобальный критерий оценки проектируемой системы, модель проектируемой системы является сложной, количество варьируемых технических параметров велико. Тогда для решения задач такого типа используется метод декомпозиции [4,6,7], в процессе использования которого необходимо искать недоминируемые решения.

Будем полагать, что у лица принимающего решение (ЛПР) есть математическая модель рассматриваемой системы, представленная в виде программного модуля. На вход модуля подается вектор варьируемых параметров x размерности N, этот вектор ограничен

$x \in X \subset R^N$.

На выходе модели получают значения вектора $u \in R^M$. Каждому значению вектора x из допустимой области сопоставлено значение u(x), значит на множестве X задана функция u(x). Поскольку модель известна, то часто известны свойства этой функции: непрерывность, дифференцируемость и т.п.

Если все функции желательно максимизировать, то можно говорить, что в пространстве критериев задана структура доминирования $R^+ = \{u \mid u \geq 0\}$, аналогично определяется R^-. Это означает, что для любого фиксированного вектора u^0 все вектора находящиеся в множестве $u^0 + R^+ \setminus 0$ будут лучше для ЛПР, чем u^0, а все вектора в множестве $u^0 + R^- \setminus 0$ для ЛПР будут хуже, чем u^0. Если вектор u лучше, чем u^0, то будем говорить, что он доминирует данный вектор.

Определение. Множество Λ называется конусом, если для любого $u \in \Lambda$ следует, что все вектора $cu \in \Lambda,$ для всех действительных чисел $c > 0$.

В дальнейшем будем полагать, что все используемые конуса являются выпуклыми, т.е. данный конус является выпуклым множеством.

Нетрудно видеть, что множества R^+ и R^- являются выпуклыми конусами.

Определение. Будем говорить, что на множестве U задана структура доминирования в виде конуса Λ, если для любой точки u^0 данного множества все вектора $u \in U$ будут для ЛПР лучше, чем u^0, если $u \in u^0 + \Lambda \setminus 0$.

Если вектор u не находится в множестве $(u^0 + \Lambda \setminus 0) \cup (u^0 - \Lambda \setminus 0)$, то будем говорить, что данный вектор несравним с u^0, для сравнения этих векторов нужна дополнительная информация. Будем обозначать множество недоминируемых векторов на U для данного конуса Λ U_Λ и назовем такие решения Λ-оптиальными. Здесь можно заметить, что из условия $\Lambda_1 \subset \Lambda$ следует $U_{\Lambda_1} \supseteq U_\Lambda$.

Определение. Вектор $u^0 \in U$ называется оптимальным по Парето, если не существует $u \in U, u \neq u^0$, что $u \geq u^0$.

Определение. Вектор $u^0 \in U$ называется оптимальным по Слейтеру, если не существует $u \in U$, что $u > u^0$.

Из определения следует, что множество Парето-оптимальных решений на множестве U есть множество недоминируемых решений на этом множестве для конуса R^+, а множество решений оптимальных по Слейтеру – множество недоминируемых решений для открытого конуса $R^+ \setminus \Gamma R^+$.

Замечание. Большинство методов, используемых для нахождения Парето-оптимальных решений и решений оптимальных по Слейтеру не являются устойчивыми. Для решения этой проблемы можно использовать методы регуляризации [2,3,4,5] и искать более широкое множество ннедоминируемых решений для конусов $\Lambda \subset R^+$.

В некоторых случаях, когда ЛПР использует линейную свертку и может задавать интервалы изменения весов критериев, множество недоминируемых решений будет уже множества Парето-оптимальных решений [5,10], оно соответствует конусу $\Lambda \supset R^{+}$.

На практике для нахождения Парето-оптимальных решений используются следующие методы [8]:

1. Метод лексико-графического упорядочения. В этом методе критерии ранжируются по важности. Полагают, что первый критерий наиболее важный, затем по важности идет второй критерий и т.д. Если это не соответствует исходным номерам критериев, то критерии можно переобозначить. Далее решается задача математического программирования

$$u_1^0 = \max_{x \in X} u_1(x),$$

затем

$$u_2^0 = \max_{x \in X, u_1(x) = u_1^0} u_2(x)$$

и т.д. Недостатком данного метода является то, что в большинстве случаев удается найти оптимальное значение только самого важного критерия.

2. Метод идеальной точки. Метод состоит из двух этапов. На первом этапе находятся координаты идеальной точки путем решения M задач математического программирования

$$u_i^0 = \max_{x \in X} u_i(x).$$

На втором этапе находится Парето-оптимальная точка ближайшая к идеальной. Иногда такое решение возможно, но оно не всегда принимается ЛПР.

3. Для выпуклых множеств $U = U(x)$ произвольную Парето-оптимальную точку можно получить с помощью максимизации линейной свертки

$$f = \sum \alpha_i u_i(x), \alpha \geq 0,$$

меняя веса α.

4. Если множество $U = U(x)$ не является выпуклым, то произвольную Парето-оптимальную точку можно получить максимизируя свертку Гермейера

$$u^1 = \max_{x \in X} \min_i \{\alpha_i u_i(x)\}, \alpha \geq 0.$$

Ранее было замечено, что ЛПР может задать структуру доминирования, которая включает R^+, коме того, структура доминирования может быть задана различными конусами при декомпозиции задачи большой размерности, когда глобальный критерий эффективности можно представить в виде

$$F(x) = \Phi(u(x)), x \in X,$$

где функция $\Phi(u)$ является Λ-монотонной для некоторого конуса Λ.

Определение. Множество векторов $\{H_i\}, i = \overline{1,L}$ называется генератором конуса Λ, если $\Lambda = \{u \mid (u, H_i) \geq 0, i = \overline{1,L}\}$.

Пусть Λ- многогранный конус с генератором $\{H_i\}, i = \overline{1,L}$, тогда произвольную Λ-оптимальную точку можно получить путем решения задачи математического программирования

$$\begin{aligned} & t \to \max, \\ & (u(x) - (Et + P), H_i) \geq 0, i = \overline{1,L}, \qquad (1) \\ & x \in X \subset R^N. \end{aligned}$$

Здесь E – некоторый вектор из множества Λ.

Если ЛПР осуществляет выбор, то он задает вектор P – как значение желаемого варианта. Затем решение задачи (1) дает Λ-оптимальный вариант, ближайший к желаемому. Последовательно задавая желаемые варианты и вычисляя ближайшие оптимальные, возможно организовать человеко-машинную процедуру поиска решения, которое удовлетворяет предпочтениям ЛПР. Если выполнены предположения о существовании у ЛПР неявной функции полезности, то процедура сходится.

Если множество X – задано линейными ограничениями, то для решения задачи (1) удобно использовать методы возможных направлений [1]. Если ограничения не являются линейными, то возможно использовать методы штрафных функций [3,9].

Библиографический список:

1. Зойтендейк Г. Методы возможных направлений. - М.: Издательство иностранной литературы, 1963.

2. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: АЙРИСПРЕСС, 2002.

3. Карманов В.Г. Математическое программирование. М.: Физматлит, 2008.

4. Киселев В.В., Гончаренко В.М. Математическое моделирование социально-экономических процессов. М.: КНОРУС, 2021.

5. V.V Kiselev. Application of the Λ-Monotonicity to the Search for Optimal Solutions in Higher-Dimensional Problems //JOURNAL OF MASHEMATICAL SCIENCE. - 2016- Volume 216. - Number 5. –pp. 667-673. (2016).

6. Краснощёков П.С., Морозов В.В., Фёдоров В.В.. Декомпозиция в задачах проектирования // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, №2 (1979).

7. Математические методы в экономике и финансах/ под ред. В.М. Гончаренко и В.Ю. Попова. - М.: КНОРУС, 2016. С. 244-266.

8. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. - М.: Физматлит, 2007.

9. Фиакко А., Мак-Кормик Г. Нелинейное программирование. - М.: МИР, 1972.

10. Yu, P.L. Cone. Cone convexity, cone extreme points, and nondominated solutions in decision problems with multiobjectives // Optim. Theory Appl. − 1974. − V. 14. − № 3.

Оригинальность 95%