

УДК 539.32+539.382.4

***ПРОГНОЗИРОВАНИЕ УПРУГИХ СВОЙСТВ СЛОИСТЫХ  
АРМИРОВАННЫХ ПЛАСТИКОВ И ВЫБОР ОПТИМАЛЬНЫХ УГЛОВ  
УКЛАДКИ СЛОЁВ В СЛОИСТОМ КОМПОЗИЦИОННОМ МАТЕРИАЛЕ***

***Долгих Д. Ю.***

*Студент 4 курса, Аэрокосмического факультета,  
Кафедра “Механика композиционных материалов и конструкций”,  
Пермский национальный исследовательский политехнический университет,  
Пермь, Россия*

***Галимуллина А. Р.***

*Студент 4 курса, Аэрокосмического факультета,  
Кафедра “Механика композиционных материалов и конструкций”,  
Пермский национальный исследовательский политехнический университет,  
Пермь, Россия*

***Нургалиева К. Р.***

*Студент 4 курса, Аэрокосмического факультета,  
Кафедра “Механика композиционных материалов и конструкций”,  
Пермский национальный исследовательский политехнический университет,  
Пермь, Россия*

***Володин П. В.***

*Студент 4 курса, Аэрокосмического факультета,  
Кафедра “Механика композиционных материалов и конструкций”,  
Пермский национальный исследовательский политехнический университет,  
Пермь, Россия <sup>1</sup>*

---

<sup>1</sup> Науч.рук. профессор, доктор физ.-мат. наук А.А.Чекалкин

**Аннотация**

В ходе исследования были произведены расчёты по определению упругих и прочностных характеристик слоистого композиционного материала, а также рассчитан предел монолитности всей конструкции. В результате чего были получены оптимальные углы армирования слоистого композита, которые дают наилучшие физико-механические характеристики материала. Построена диаграмма анизотропии для модуля Юнга. Вычислен предел монолитности вдоль оси X слоистого пакета, с полученными в ходе расчёта упругими характеристиками.

**Ключевые слова:** слоистый композитный материал, упругие свойства, углы армирования, предел монолитности, стеклопластик.

***PREDICTION OF ELASTIC PROPERTIES OF LAMINATED  
REINFORCED PLASTICS AND CHOOSING THE OPTIMAL ANGLES OF  
LAYING LAYERS IN A LAYERED COMPOSITE MATERIAL AND FINDING  
THE LIMIT OF SOLIDITY***

***Dolgikh D. Y.***

*4th year student, Aerospace Faculty,*

*Department of “Mechanics of Composite Materials and Structures”,*

*Perm National Research Polytechnic University,*

*Perm, Russia*

***Galimullina A. R.***

*4th year student, Aerospace Faculty,*

*Department of “Mechanics of Composite Materials and Structures”,*

*Perm National Research Polytechnic University,*

*Perm, Russia*

***Nurgalieva K. R.***

*4th year student, Aerospace Faculty,*

*Department of “Mechanics of Composite Materials and Structures”,  
Perm National Research Polytechnic University,  
Perm, Russia*

***Volodin P. V.***

*4th year student, Aerospace Faculty,  
Department of “Mechanics of Composite Materials and Structures”,  
Perm National Research Polytechnic University,  
Perm, Russia*

### **Abstract**

Prediction of elastic properties of laminated reinforced plastics. Choosing the optimal angles of laying layers in a layered composite material and finding the limit of solidity. In the course of the study, calculations were made to determine the elastic and strength characteristics of the layered composite material, and the limit of solidity of the entire structure was calculated. As a result, optimal reinforcement angles of the layered composite were obtained, which give the best physical and mechanical characteristics of the material. An anisotropy diagram for the Young's modulus is constructed.

**Keywords:** layered composite material, elastic properties, reinforcement angles, limit of solidity, fiberglass.

### **Введение**

В последнее время все больше композиционных материалов используется в различных областях науки и техники. Возможность выбора материалов, оптимальных по характеристикам, является одной из особенностей создания конструкций из композитов.

Любой стандартный материал имеет определенные константы, и проектируемые композиты имеют разную внутреннюю структуру. Изменяя структуру композитного материала, можно изменять его свойства [3].

В процессе проектирования композитов могут возникать различные задачи:

- прямой расчет характеристик;
- параметрический анализ;
- скалярная оптимизация;
- исследование предельных возможностей.

Для разных видов композитов задачи управления свойствами ставятся и решаются разными способами. Эти вопросы рассматриваются ниже для двух наиболее распространенных типов композиционных материалов: однонаправленных волокнистых материалов и многослойных пакетов. При оптимизации любого типа композитной структуры необходимо составить макромодель однородного материала с заданными свойствами. Эти свойства зависят как от свойств компонентов композиционного материала, так и от структурных параметров, определяющих, например, связи и взаиморасположения между этими компонентами. При этом свойства компонентов композиционного материала считаются неизменными, а структурные параметры могут варьироваться в процессе поиска оптимальной конструкции для достижения необходимых изменений их свойств. Представление задачи оптимального проектирования композиционных материалов соответствует общей постановке и схеме решения задачи оптимизации композиционных материалов и конструкций. В соответствии с этой схемой для правильной постановки задачи оптимального проектирования необходимо осуществить последовательный выбор:

- объект проектирования;
- варьируемые параметры;
- критерии качества.

Возможные варианты зависят от типа проектируемого материала. Расчетная модель, используемая для описания отдельных свойств проектируемого материала, в большинстве случаев согласуется с проведенными

исследованиями, в противном случае каждый алгоритм расчета имеет соответствующую ссылку. Приведенные здесь примеры, как правило, описывают композиты, армированные волокнами с полимерной матрицей. Многие положения применимы и к более широкому классу композиционных материалов [2].

Стеклопластики являются характерными представителями композиционных материалов. Благодаря низкой теплопроводности, высокой усталостной и удельной прочности, отличной технологичности они широко применяются в авиационных конструкциях, аэрокосмической промышленности и других отраслях современной техники [6].

Цель работы, определение оптимальных углов укладки слоёв композита, при которых будут получены предпочтительные упругие и прочностные характеристики пятислойного пакета. Вычисление предела монолитности и определение характера разрушения слоя при потере его монолитности.

#### **Математическая постановка**

Для исследования был выбран слоистый композит, состоящий из пяти слоев, стекловолокна и S-эпоксидной матрицы с коэффициентом армирования  $\psi = 0,55$ . Толщина каждого слоя равна  $h = 0,5 * 10^{-3}$  м.

Требуется рассчитать модуль упругости в направлениях осей X и Y, модуль сдвига в плоскости XY, коэффициент Пуассона и предел монолитности всей конструкции. Механические характеристики стекловолокна и S-эпоксидной матрицы представлены в таблице 1 и таблице 2 соответственно.

Таблица 1 – Механические характеристики стекловолокна

Модуль Юнга E, МПа	$E_B = 90 * 10^3$
Модуль Сдвига, МПа	$G_B = 31 * 10^3$
Коэффициент Пуассона $\nu$	$\nu_B = 0.25$

Таблица 2 – Механические характеристики S-эпоксидной матрицы

Модуль Юнга E, МПа	$E_B = 3 * 10^3$
Модуль Сдвига, МПа	$G_B = 1.26 * 10^3$
Коэффициент Пуассона $\nu$	$\nu_B = 0.34$

При вычислении упругих характеристик слоистого композита примем следующие предположения:

— Представительный объем композита находится в однородном напряжённом состоянии;

— Деформации в направлениях  $x$  и  $y$ , а также деформации сдвига в плоскости армирования одинаковы для всех слоёв и равны средним деформациям слоистого элемента;

— Слоистый композит состоит из регулярно чередующихся тонких слоев, уложенных под различными углами по отношению к направлению нагружения. Структуру композита по толщине считаем симметричной относительно срединной плоскости.

Составим уравнения равновесия расчётного элемента, состоящего из 5 слоёв:

$$\begin{cases} N_x = \sum_{k=1}^5 \sigma_x^{(k)} * h_k \\ N_y = \sum_{k=1}^5 \sigma_y^{(k)} * h_k \\ N_{xy} = \sum_{k=1}^5 \sigma_{xy}^{(k)} * h_k \end{cases} \quad (1)$$

В этом случае напряжённо-деформируемое состояние описывается уравнениями:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

Где  $A_{ij}$  – коэффициенты жёсткости,  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  – деформации в слоистом элементе.

Обобщенный закон Гука для плоского напряженного состояния соответствует случаю, когда слои уложены симметрично относительно центральной плоскости по толщине слоистого пакета, но при этом слои уложены произвольно относительно угла укладки. Также в нашей модели упругие характеристики  $i$ -го слоя в главных направлениях упругой симметрии  $i$ -го слоя одинаковы.

При определении предела монолитности одна грань слоистого пакета будет жёстко закреплена, а к противоположной грани будет приложена растягивающая нагрузка равная 10 МПа.

### **Расчёт упругих характеристик и предела монолитности слоистого элемента**

Для автоматизации вычисления и составления таблицы зависимости углов укладки слоёв от упругих свойств композитного элемента, а также составление диаграммы анизотропии, использовался Microsoft Excel.

Формулы для модуля упругости  $E_1$  и коэффициента Пуассона  $\nu_{12}$  достаточно точны для использования в инженерных расчётах. Соотношения для модулей  $E_2$  и  $G_{12}$  могут быть рекомендованы для прикидочных расчётов.

Определим упругие характеристики однонаправленного слоя:

$$E_1 = E_B * \psi + E_M * (1 - \psi), \quad (3)$$

$$E_2 = \frac{E_B * E_M}{E_M * \psi + E_B * (1 - \psi)}, \quad (4)$$

$$G_2 = \frac{G_B * G_M}{G_M * \psi + G_B * (1 - \psi)}, \quad (5)$$

$$v_{12} = v_B * \psi + v_M * (1 - \psi), \quad (6)$$

$$v_{21} = \frac{v_{12} * E_2}{E_1}. \quad (7)$$

Следующим шагом вычислений, определяем коэффициенты жёсткости  $A_{ij}$  по формулам:

$$A_{11} = \sum_{i=1}^5 h_i * \left( \frac{E_1}{1 - v_{12}v_{21}} * \cos^4 \varphi_i + 2 * \frac{E_1}{1 - v_{12}v_{21}} * v_{21} * \sin^2 \varphi_i * \cos^2 \varphi_i + \frac{E_2}{1 - v_{12}v_{21}} * \sin^4 \varphi_i + G_{12} * \sin^2 2\varphi_i \right), \quad (8)$$

$$A_{22} = \sum_{i=1}^5 h_i * \left( \frac{E_1}{1 - v_{12}v_{21}} * \sin^4 \varphi_i + 2 * \frac{E_1 * v_{21}}{1 - v_{12}v_{21}} * \sin^2 \varphi_i * \cos^2 \varphi_i + \frac{E_2}{1 - v_{12}v_{21}} * \cos^4 \varphi_i + G_{12} * \sin^2 2\varphi_i \right), \quad (9)$$

$$A_{12} = \sum_{i=1}^5 h_i * \left( \frac{E_1 + E_2}{1 - v_{12}v_{21}} * \sin^2 \varphi_i * \cos^2 \varphi_i + \frac{E_1 * v_{21}}{1 - v_{12}v_{21}} * (\sin^4 \varphi_i + \cos^4 \varphi_i) - G_{12} * \sin^2 2\varphi_i \right), \quad (10)$$

$$A_{12} = \sum_{i=1}^5 h_i * \left( \frac{E_1 + E_2 - 2E_1 * v_{21}}{1 - v_{12}v_{21}} * \sin^2 \varphi_i * \cos^2 \varphi_i + G_{12} * \sin^2 2\varphi_i \right), \quad (11)$$

$$A_{21} = A_{12}. \quad (12)$$

Где  $h_i = 0.2$ ,  $\varphi_i$  – угол укладки слоя относительно срединного слоя. Наибольший практический интерес представляет такая схема армирования, когда слои по высоте пакета уложены симметрично относительно срединной плоскости и в то же время удовлетворяют условию: каждому слою, уложенному под углом  $+\varphi_i$ , соответствует такой же толщины слой с углом армирования  $-\varphi_i$  и расположенный на таком же расстоянии от срединной плоскости [4].

Определяем упругие и прочностные характеристики пятислойного композита:



$$E_x = A_{11} - \frac{A_{12}^2}{A_{22}}, \quad (13)$$

$$E_y = A_{22} - \frac{A_{12}^2}{A_{11}}, \quad (13)$$

$$G_{xy} = A_{66}, \quad (14)$$

$$\nu_{xy} = \frac{A_{12}}{A_{22}}, \quad (15)$$

$$\nu_{yx} = \frac{A_{12}}{A_{11}}. \quad (16)$$

Для расчёта предела монолитности слоистого элемента, необходимо рассчитать напряжения в его слоях.

Необходимо вычислить эффективные упругие характеристики пакета (матрица жёсткости, податливости и т.д.). Далее вычисляются средние деформации в пакете, по заданным средним напряжениям по закону Гука в системе координат пакета.

$$\{\sigma_{xy}\} = [A_{xy}] * \{\varepsilon_{xy}\} \quad (17)$$

Деформации в слоях приравниваем к средним деформациям пакета. Вычисляем напряжение в слоях по закону Гука для слоя в системе координат пакета.

$$\{\sigma_{xy}^{(k)}\} = [\overline{A_{xy}}] * \{\varepsilon_{xy}\} \quad (18)$$

Находим напряжения в слоях в системе координат главной анизотропии слоя по формулам преобразования матриц напряжения.

$$\{\sigma_{12}^{(k)}\} = [T_1^{-1}] * \{\sigma_{xy}^{(k)}\}, \quad (18)$$

Где  $[T_1^{-1}]$  – матрица обратных преобразований.

Заключительный этап расчётов, это вычисление напряжений ( $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$  в системе координат слоя), эти напряжения мы будем использовать для анализа разрушения слоёв [1].

### Результаты

Упругие характеристики и прочностные свойства слоистого композитного материала зависят от углов укладки слоёв. Так как наиболее предпочтительна симметричная схема армирования, то угол поворота слоя номер 3 был принят равный  $0^\circ$ . Были проанализированы комбинации углов армирования, при которых углы армирования 1 и 5, 2 и 4 слоёв равны, но взяты с противоположным знаком.

Для решения задачи определения оптимальных углов армирования нашего слоистого композита, мы провели расчеты для всех возможных комбинаций углов в диапазоне от  $0^\circ$  до  $90^\circ$  с шагом  $10^\circ$ . При этом было установлено, что один из слоев всегда имеет угол  $0^\circ$ . Результаты показали, что самой предпочтительной схемой армирования является сочетание углов  $-80^\circ/-30^\circ/0^\circ/30^\circ/80^\circ$ . Упругие свойства пятислойного стеклопластика представлены в таблице 3.

Таблица 3 – Упругие характеристики стеклопластика, состоящего из стекловолокна и S – эпоксидной матрицы со схемой армирования  $80^\circ/-30^\circ/0^\circ/30^\circ/80^\circ$

Модуль Юнга вдоль оси X, ГПа	$E_x = 24.41$
Модуль Юнга вдоль оси Y, ГПа	$E_y = 23.38$
Модуль Сдвига, ГПа	$G_{xy} = 6.43$
Коэффициент Пуассона $\nu$	$\nu_{xy} = 0.22, \nu_{yx} = 0.21$

В результате проведенных исследований мы получили диаграмму, отражающую анизотропию слоистого элемента в плоскости оси X (рисунок 1). Анализ данной диаграммы показал, что значения модуля Юнга достигают своих минимальных значений при углах  $50^\circ$ ,  $130^\circ$ ,  $230^\circ$  и  $310^\circ$ . С другой стороны, максимальные значения модуля упругости наблюдаются при углах  $0^\circ$  и  $180^\circ$ .

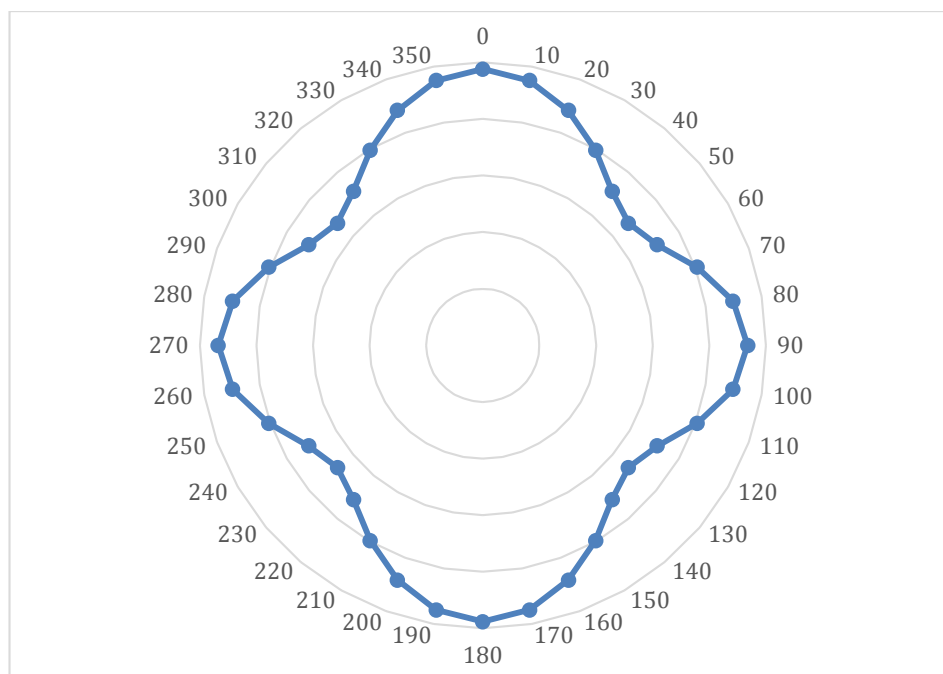


Рис. 1 Диаграмма анизотропии модуля Юнга вдоль оси X

[Авторская разработка]

Расчёт предела монолитности показал, что разрушающее напряжение вдоль оси X равно  $\sigma_{\text{разр}} = 124$  МПа, вдоль оси Y при  $\sigma_{\text{разр}} = 115$  МПа. потеря монолитности произойдёт в слое с углом армирования  $-80^\circ$ . Особенность разрушения слоя заключается в разрыве поперёк волокон.

### Заключение

В данной работе нами был произведён расчёт упругих и прочностных характеристик пятислойного композиционного материала, состоящего из стекловолокна и S-эпоксидной матрицы. Была выбрана оптимальная схема армирования композита и получена диаграмма анизотропии для значения  $E_x$ . Рассчитаны пределы при котором происходит потеря монолитности слоистой композиции, так же определён слой, в котором это произойдёт и характер

разрушения. Исходя из полученных результатов можем сделать вывод: материал может быть использован в элементе конструкции, который воспринимает нагрузки до 100 МПа одновременно или поочерёдно в двух направлениях X и Y.

Публикация подготовлена в рамках образовательной программы ПНИПУ по учебной дисциплине строительная механика конструкций из композиционных материалов [5].

### **Библиографический список**

1. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. Расчёт многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. - 1-е изд. - М.,: Машиностроение, 1984. - 264 с.
2. Зиновьев П.А., Смердов А.А. Оптимальное проектирование композитных материалов. - 1-е изд. - М.,: о МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. - 103 с.
3. Колесников В.И., Бардушкин В.В., Лавров И.В., Сычев А.П., Сычев А.А., Яковлев В.Б. Прогнозирование эффективных упругих свойств полимерных фрикционных материалов // Наука юга России. - 2019. - №2. - С. 3-9.
4. Первушин Ю.С., Жернаков В.С. Основы механики, проектирования и технологии изготовления изделий из слоистых композиционных материалов: учебное пособие. - М.: Уфимский государственный авиационный технический университет, 2008. - 308 с.
5. Чекалкин А.А., Палкин Д.Д. Строительная механика, динамика и устойчивость композитных конструкций: учебное пособие. - 1-е изд. - Пермь: Пермский национальный исследовательский политехнический университет, 2021. - 230 с.
6. Шамбина С.Л. анизотропные композиционные материалы и особенности расчёта конструкций из них // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. - 2005. - №1. - С. 113-118.

*Оригинальность 77%*