УДК: 514.8+537.8

DOI 10.51691/2541-8327_2023_12_27

О СПИНОРАХ КИЛЛИНГА В ПРОСТРАНСТВЕ МИНКОВСКОГО

Тришин В. Н.
к. ф.-м.н., доцент,
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,
Москва, Россия

Тришина Н. Е.
к. ф.-м.н., доцент,
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,
Российский химико-технологический университет им. Д. И. Менделеева,
Москва, Россия

Аннотация.
Статья представляет собой педагогическое введение в теорию спиноров Киллинга и соответствующих им конформных тензоров Киллинга-Яно. Дан подробный вывод общего решения уравнения для спинора Киллинга в пространстве Минковского и общий вид соответствующего конформного тензора Киллинга-Яно. Также построен ассоциированный с ним тензор Киллинга.

Ключевые слова: спинор Киллинга, конформный тензор Киллинга-Яно, тензор Киллинга.

ON KILLING SPINORS IN MINKOWSKI SPACE

Trishin V. N.
PhD, Associate Professor,
Bauman Moscow State Technical University,

Moscow, Russia

Trishina N. E.
PhD, Associate Professor,
Bauman Moscow State Technical University,
Mendeleev University of Chemical Technology of Russia,
Moscow, Russia

Abstract.
The article is a pedagogical introduction to the theory of Killing spinors and their corresponding conformal Killing-Yano tensors. A detailed derivation of the general solution of the equation for the Killing spinor in Minkowski space and a general form of the corresponding conformal Killing-Yano tensor are given. The associated Killing tensor is also constructed.
Keywords: Killing spinor, conformal Killing-Yano tensor, Killing tensor.

Введение

Спиноры Киллинга, как хорошо известно [1,2,4], описывают “скрытые симметрии” пространства-времени, не связанные с изометрией метрики. Соответственно, эти симметрии не могут быть представлены векторами Киллинга и требуют отдельного исследования. Существование спиноров Киллинга приводит к наличию дополнительных первых интегралов движения вдоль изотропных геодезических и к разделению переменных в уравнениях Гамильтона-Якоби, Клейна-Гордона и др.

В данной учебной заметке мы рассматриваем решения уравнения спинора Киллинга φ_{AB} в плоском пространстве-времени Минковского M. Используя формализм абстрактных индексов [3], запишем уравнение в виде

$$\nabla_{C'(C}\varphi_{AB)} = 0, \tag{1}$$

где $\nabla_{AA'}$ - ковариантная производная для плоской связности Леви-Чивита, а φ_{AB} – симметричный 2-спинор Киллинга. Найдём общее решение этого уравнения.

Условие (1) эквивалентно существованию комплексного векторного поля $K_{AA'}$ такого, что

$$\nabla_{CC'}\varphi_{AB} = \varepsilon_{CA}K_{BC'} + \varepsilon_{CB}K_{AC'}, \qquad (2)$$

где $K_{AA'} = \frac{1}{3}\nabla_{A'X}\varphi^{X}_{A'}$. Продифференцируем равенство (2) ещё один раз. Поскольку в плоском пространстве производные коммутируют, то самодуальная часть коммутатора $\nabla_{X(D'}\nabla^{X}{}_{C')}\varphi_{AB} = 0$, и для поля $K_{AA'}$ получаем условие $\nabla^{(A}_{(A'}K^{B)}_{B')} = 0$, откуда

$$\nabla^{A}_{A'}K^{B}_{B'} = -\varepsilon^{AB}\overline{\Omega}_{A'B'} \qquad (3)$$

для некоторого симметричного спинора $\overline{\Omega}_{A'B'} = \overline{\Omega}_{(A'B')}$. Дифференцируя повторно равенство (3), и учитывая, что $\nabla_{XC'}\nabla^{X}{}_{A'}K^{B}_{B'} = 0$, получим $\nabla_{C'}{}^{B}\overline{\Omega}_{A'B'} = 0$, т. е. спинор $\overline{\Omega}_{A'B'}$ должен быть постоянным. Тогда интегрирование уравнения (3) даёт

$$K^{B}_{B'} = x^{A'}_{A}(-\varepsilon^{AB}\overline{\Omega}_{A'B'}) + U^{B}_{B'} = U^{B}_{B'} + \overline{\Omega}_{A'B'}x^{BA'}, \qquad (4)$$

где $U_{AA'}$ – произвольный постоянный комплексный вектор. Подставив это выражение в равенство (2), после интегрирования получим

$$\varphi_{AB} = \sigma_{AB} + 2U_{A'(A}x_{B)}{}^{A'} + \overline{\Omega}_{A'B'}x_{A}{}^{A'}x_{B}{}^{B'}, \qquad (5)$$

где $\sigma_{AB} = \sigma_{(AB)}$ – произвольный постоянный симметричный спинор. Это выражение даёт общее решение уравнения спинора Киллинга (1) в пространстве-времени Минковского. Очевидно, что действительная размерность пространства решений равна 20 – 3 комплексные компоненты у спинора σ_{AB}, 4 комплексные компоненты у вектора $U_{AA'}$ и 3 комплексные компоненты у спинора $\Omega_{A'B'}$.

Используя стандартную технику (см. например [3]) перехода от спинорных индексов к тензорным, можно переписать уравнение спинора Киллинга (1) и его общее решение (5) в тензорном виде. Спинору Киллинга соответствует антисимметричный тензор

$$Q_{\mu\nu} = \varphi_{AB}\varepsilon_{A'B'} + \bar{\varphi}_{A'B'}\varepsilon_{AB}, \qquad (6)$$

который называется конформный тензор Киллинга-Яно. Если спинор φ_{AB} удовлетворяет уравнению (1), то тензор $Q_{\mu\nu}$ является решением уравнения

$$\nabla_{(\mu}Q_{\nu)\alpha} = \frac{1}{3}\nabla_{\sigma}(g_{\mu\nu}Q^{\sigma}_{\alpha} - Q^{\sigma}_{(\mu}g_{\nu)\alpha}), \qquad (7)$$

что легко проверить прямой подстановкой.

Выведем теперь тензорное представление общего решения (5). Спинору σ_{AB} соответствует постоянный антисимметричный тензор $C_{\mu\nu} = \sigma_{AB}\varepsilon_{A'B'} + \bar{\sigma}_{A'B'}\varepsilon_{AB}$. Записывая комплексный вектор U_{μ} в виде $U_{\mu} = u_{\mu} + iv_{\mu}$, получим

$$2(U_{C'(A}x_{B)}{}^{C'}\varepsilon_{A'B'} + 2\bar{U}_{C(A'}x_{B')}{}^{C}\varepsilon_{AB}) =$$
$$= 2(u_{C'(A}x_{B)}{}^{C'}\varepsilon_{A'B'} + 2u_{C(A'}x_{B')}{}^{C}\varepsilon_{AB}) + 2i(v_{C'(A}x_{B)}{}^{C'}\varepsilon_{A'B'} - 2v_{C(A'}x_{B')}{}^{C}\varepsilon_{AB})$$
$$= 4u_{[\mu}x_{\nu]} - 2\varepsilon_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta}v_{\alpha}x_{\beta}$$

Сопоставляя спинору Ω_{AB} антисимметричный тензор $\Omega_{\mu\nu} = \Omega_{AB}\varepsilon_{A'B'} + \bar{\Omega}_{A'B'}\varepsilon_{AB}$, и учитывая, что $\Omega_{\mu\nu}x^{\nu} = \Omega_{A}{}^{B}x_{BA'} + c.c.$, где “с.с.” обозначают комплексно сопряжённые слагаемые, получим

$$\Omega_{\mu\alpha}x^{\alpha}x_{\nu} - \Omega_{\nu\alpha}x^{\alpha}x_{\mu} = -(\varepsilon_{AB}\Omega_{CD}x^{C}{}_{A'}x^{D}{}_{B'} - \frac{1}{2}\bar{\Omega}_{A'B'}x_{CC'}x^{CC'}) + c.c.$$

откуда

$$\bar{\Omega}_{C'D'}x^{C'}{}_{A}x^{D'}{}_{B}\varepsilon_{A'B'} + \Omega_{CD}x^{C}{}_{A'}x^{D}{}_{B'}\varepsilon_{AB} = \frac{1}{2}\Omega_{\mu\nu}x_{\alpha}x^{\alpha} + 2x^{\alpha}\Omega_{\alpha[\mu}x_{\nu]}. \qquad (8)$$

В результате, подставляя полученные выражения в (6), можно записать общее решение уравнения (7), определяющее конформный тензор Киллинга-Яно в пространстве-времени Минковского:

$$Q_{\mu\nu} = C_{\mu\nu} + 4u_{[\mu}x_{\nu]} - 2\varepsilon_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta}v_{\alpha}x_{\beta} + \frac{1}{2}\Omega_{\mu\nu}x_{\alpha}x^{\alpha} + 2x^{\alpha}\Omega_{\alpha[\mu}x_{\nu]}. \qquad (9)$$

Ассоциированные вектор Киллинга и тензор Киллинга

Поскольку вектор $K_{\mu} = \frac{1}{3}\nabla_{A'X}\varphi^{X}_{A'}$ удовлетворяет условию $\nabla^{(A}_{(A'}K^{B)}_{B')} = 0$ и, как легко проверить, условию $\nabla_{AA'}K^{AA'} = 0$, то K_{μ} является (комплексным) вектором Киллинга пространства Минковского:

$$\nabla_{(\mu}K_{\nu)} = 0. \tag{10}$$

Его действительная часть $Re(K_\mu) = \frac{1}{2}(K_\mu + \overline{K}_\mu)$ и мнимая часть $Im(K_\mu) = \frac{1}{2i}(K_\mu - \overline{K}_\mu)$ равны соответственно

$$Re(K_\mu) = u_\mu - \frac{1}{2}\Omega_{\mu\alpha}x^\alpha, \tag{11}$$

$$Im(K_\mu) = v_\mu - \frac{1}{2}\,{}^*\Omega_{\mu\alpha}x^\alpha, \tag{12}$$

где введён дуальный тензор ${}^*\Omega_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta}\Omega_{\alpha\beta}$. Каждая из частей определяет полный набор векторов Киллинга плоского пространства.

Заметим, что обозначив дивергенцию конформного тензора Киллинга-Яно как $\xi_\mu = \frac{1}{3}\nabla^\alpha Q_{\alpha\mu}$, уравнение (7) можно переписать в виде

$$\nabla_{(\mu}Q_{\nu)\alpha} = \xi_\alpha g_{\mu\nu} - \xi_{(\mu}g_{\nu)\alpha}. \tag{13}$$

Если $\xi_\mu = 0$, то $Q_{\mu\nu}$ удовлетворяет уравнению Киллинга-Яно:

$$\nabla_{(\mu}\hat{Q}_{\nu)\alpha} = 0. \tag{14}$$

Поскольку $\xi_\mu = -2Re(K_\mu) = \Omega_{\mu\alpha}x^\alpha - 2u_\mu$, то мы получаем, что в пространстве Минковского общий тензор Киллинга-Яно имеет вид

$$\hat{Q}_{\mu\nu} = C_{\mu\nu} - 2\varepsilon_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta}v_\alpha x_\beta. \tag{15}$$

С помощью конформного тензора Киллинга-Яно определим симметричный тензор

$$K_{\mu\nu} = Q_{\mu\alpha}Q_\nu{}^\alpha. \tag{16}$$

Используя выражение (6), получим соответствующее спинорное представление:

$$K_{\mu\nu} = P\varepsilon_{AB}\varepsilon_{A'B'} - 2\varphi_{AB}\varphi_{A'B'}, \qquad P = Re(\varphi_{AB}\varphi^{AB}) = \frac{1}{4}Q_{\mu\nu}Q^{\mu\nu}. \tag{17}$$

Прямыми вычислениями убеждаемся, что этот тензор удовлетворяет уравнению

$$\nabla_{(\mu}K_{\alpha\beta)} = 2g_{(\alpha\beta}Q_{\mu)\gamma}\xi^\gamma, \tag{18}$$

которое определяет конформный тензор Киллинга. В частности, если $\xi_\mu = 0$, то есть $\hat{Q}_{\mu\nu}$ является тензором Киллинга-Яно, то тензор $\hat{K}_{\mu\nu} = \hat{Q}_{\mu\alpha}\hat{Q}_\nu{}^\alpha$ будет тензором Киллинга, удовлетворяющим уравнению

$$\nabla_{(\mu}\widehat{K}_{\alpha\beta)} = 0. \tag{19}$$

В этом случае для каждой частицы с 4-импульсом p^μ, движущейся по геодезической линии пространства M, будет сохраняться величина $Q = \widehat{K}_{\mu\nu}p^\mu p^\nu$, определяя тем самым дополнительный (квадратичный) первый интеграл движения. Действительно, поскольку на геодезической линии $p^\mu\nabla_\mu p^\nu = 0$, то

$$p^\alpha\nabla_\alpha Q = \widehat{K}_{\mu\nu}(p^\nu p^\alpha\nabla_\alpha p^\mu + p^\mu p^\alpha\nabla_\alpha p^\nu) + p^\alpha p^\mu p^\nu\nabla_\alpha\widehat{K}_{\mu\nu} = 0. \tag{20}$$

Для конформного тензора Киллинга $K_{\mu\nu}$ величина $Q = K_{\mu\nu}p^\mu p^\nu$ сохраняется только на изотропных геодезических, для которых $p_\mu p^\mu = 0$.

Найдем общее решение для тензора Киллинга в пространстве Минковского, ассоциированного с тензором Киллинга-Яно. Подставляя выражение (15) для тензора Киллинга-Яно в формулу (16), после вычислений получим общий вид тензора Киллинга:

$$\widehat{K}_{\mu\nu} = C_{\mu\alpha}C_\nu{}^\alpha - 4\varepsilon_{(\mu}{}^{\alpha\beta\gamma}C_{\nu)\alpha}v_\beta x_\gamma -$$
$$-4(g_{\mu\nu}(v^2x^2 - (v\cdot x)^2) + +2v_{(\mu}x_{\nu)}(v\cdot x) - v_\mu v_\nu x^2 - x_\mu x_\nu v^2),$$

где $v^2 = v_\alpha v^\alpha$, $x^2 = x_\alpha x^\alpha$ и $v\cdot x = v_\alpha x^\alpha$.

Таким образом, мы нашли общий вид спинора Киллинга в пространстве-времени Минковского, и в результате продемонстрировали, используя формализм двухкомпонентных спиноров, как можно построить решения уравнений для конформного тензора Киллинга-Яно, тензора Киллинга-Яно и ассоциированного с ним тензора Киллинга.

Библиографический список

1. Wald R.M. General relativity. - The University of Chicago Press, 1984. -

491p.

2. Stephani H., Kramer D., MacCallum M. A. H., Hoenselaers C., Herlt E. Exact Solutions of Einstein's Field Equations. Cambridge University Press. 2003

3. Penrose R., Rindler W. Spinors and space-time. Vol 1: Two-spinor calculus and relativistic fields. Cambridge monographs on mathematical physics. Cambridge University Press, 1984.

4. Penrose R., Rindler W. Spinors and space-time. Vol 2: Spinor and twistor methods in space-time geometry. Cambridge monographs on mathematical physics. Cambridge University Press, 1988.

Оригинальность 83%