

УДК 539.376

***КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ
КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ПРОЧНОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ ОБОЛОЧЕК
ВРАЩЕНИЯ В УСЛОВИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ МАТЕРИАЛА***

Бутина Т.А.

кандидат физико-математических наук, доцент

*Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э.Баумана
(национальный исследовательский университет)*

Москва, Россия

Дубровин В.М.

кандидат технических наук, доцент

*Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э.Баумана
(национальный исследовательский университет)*

Москва, Россия

Аннотация

Одним из важных свойств конструкционных материалов является ползучесть. Она заключается в увеличении деформации в процессе эксплуатации конструкции под действием даже постоянных нагрузок. Ползучесть проявляется и при небольших уровнях напряжений и температур, но, как правило, в этих случаях она мала и отбрасывается при расчетах. Однако, при повышении температуры и уровня напряжений в конструкциях ползучесть становится заметной, а иногда решающей характеристикой в расчетах.

Используемый в приведенной статье подход для расчета напряженно-деформированного состояния оболочек вращения в условиях ползучести материала реализован численно, возможны разные методы решения

используемых уравнений. В этой связи необходим анализ полученных результатов расчета для выбора наиболее точного и подходящего метода. Такой анализ проведен на основе решения ряда задач, сравнения результатов с имеющимися точными решениями.

Ключевые слова: Ползучесть материала, упругость, пластичность, напряженно-деформированное состояние, уровни напряжений, температурный режим, оболочки вращения, нагружение, методы расчета

***FINITE-DIFFERENCE METHOD FOR NUMERICAL SOLUTION OF
BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF STRENGTH AND STABILITY OF
SHELLS OF ROTATION UNDER CONDITIONS OF CREEP OF THE
MATERIAL***

Butina T.A.

Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor

Bauman Moscow State Technical University

Moscow, Russia

Dubrovin V.M.

Candidate of Technical Sciences, associate professor

Bauman Moscow State Technical University

Moscow, Russia

Annotation

One of the important properties of structural materials is creep. It consists in increasing the deformation during the operation of the structure under the influence of even constant loads. Creep also manifests itself at low levels of stresses and

temperatures, but, as a rule, in these cases it is small and is discarded during calculations. However, with an increase in temperature and stress levels in structures, creep becomes noticeable, and sometimes a decisive characteristic in calculations.

The approach used in this article to calculate the stress-strain state of the shells of rotation under conditions of creep of the material is implemented numerically, different methods of solving the equations used are possible. In this regard, it is necessary to analyze the obtained calculation results in order to select the most accurate and appropriate method. Such an analysis was carried out on the basis of solving a number of problems, comparing the results with the available exact solutions.

Keywords: Material creep, elasticity, plasticity, stress-strain state, stress levels, temperature regime, rotation shells, loading, calculation methods

Введение

С целью проверки правильности работы применяемого численного решения проводилось сравнение с результатами решения тестовых задач, имеющих точное решение.

Конечно-разностный метод решения задачи напряженно-деформированного состояния оболочек вращения в условиях ползучести

Задача определения напряженно-деформированного состояния оболочек вращения в условиях ползучести [9] с учетом физической и геометрической нелинейности сводится к решению нелинейной неоднородной краевой задачи для системы из шести обыкновенных дифференциальных уравнений [6,11].

Задача устойчивости сводится к линейной однородной краевой задаче для системы из восьми обыкновенных дифференциальных уравнений [4,8]. Для численного решения краевых задач применялся метод конечных разностей, в котором использовалась простая и удобная конечно-разностная формула, имеющая второй порядок точности [1].

Применяемая формула имеет вид

$$\frac{\Delta x}{2} = (y'_{i+1} + y'_i) = y_{i+1} - y_i, \quad (1)$$

Основными преимуществами этой схемы по сравнению с трехточечными разностями являются:

1. Непосредственное включение граничных условий в систему алгебраических уравнений без введения дополнительных точек и увеличения ширины матрицы системы;
2. Сохранение простоты соотношений и для разбиения с переменным шагом.

Последняя особенность принятой разностной схемы в работе не использовалась, т.к. зона сильной изменчивости решения (краевой эффект) имеет тенденцию при ползучести распространяться со временем вдоль образующей.

Пусть $\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_N$ разбита на N отрезков. Применяя конечно-разностное соотношение (1) к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений [7,10], получаем систему алгебраических уравнений относительно неизвестных $u, w, \varphi, T_\alpha, N_\alpha, M_\alpha$ в узлах разбиения $S = 0, 1, \dots, N - 1$.

$$\frac{\vec{y}_{s+1} - \vec{y}_s}{\alpha_{s+1} - \alpha_s} = \frac{1}{2}(A_{ij}^s y_j^s + A_{ij}^{s+1} y_j^{s+1} + B_i^s + B_i^{s+1}) + 0(\alpha^{s+1} - \alpha^s), i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (2)$$

Нелинейные члены, соответствующие геометрической нелинейности, перенесены в правую часть и имеют значения, полученные в предыдущем

приближении (метод простой итерации). Присоединяя к соотношениям (2) граничные условия, их шесть, по три на каждом торце оболочки

$$(y_i - y'_j)\gamma_{i+3j} + (y_{i+3} - y'_{i+3})(1 - \gamma_{i+3}) = 0, j = 1, 2, 3, i = 1, 2, 3,$$

причем $j = 1$ на левом краю, $j = 2$ на правом, если нужно задать на краю оболочки кинематические граничные условия, то следует положить $\gamma = 1$, если статические, то 0 (направления внешних усилий $T_\alpha, N_\alpha, M_\alpha$ совпадают с направлениями внутренних силовых факторов [3,5]), получим неоднородную систему алгебраических уравнений

$$A_{ij}y_j = B_i, \text{ где } i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (3)$$

$A_{i,j}$ - матрица коэффициентов при неизвестных, имеющая диагональную структуру.

y_j - столбец неизвестных,

B_i - столбец свободных членов.

Система решается методом Гаусса. Применяв соотношение (1) к однородной системе обыкновенных дифференциальных уравнений устойчивости и граничным условиям, краевую задачу устойчивости сводят к решению однородной системы алгебраических уравнений вида

$$a_{ij} = \vartheta_j = 0$$

где a_{ij} - диагональная матрица коэффициентов при неизвестных,

ϑ_j - столбец неизвестных,

$i, j = 1, 2, \dots, 8$.

Условием существования нетривиального решения однородной системы является равенство нулю определителя $D[a_{ij}(\tau)] = D(\tau)$. Наименьшее

собственное значение параметра τ , при котором определитель обращается в ноль, дает критическое значение этого параметра для рассматриваемой оболочки. Этим параметром может быть нагрузка, время и пр.

Такой подход позволил разработать алгоритм для расчета поведения оболочек вращения при ползучести, который дает возможность:

а) определять напряженно-деформированное состояние (НДС) и критическую нагрузку при осесимметричной и неосесимметричной потере устойчивости оболочек вращения, находящихся под действием осесимметричных нагрузок и нагрева без учета пластичности

б) определять развитие НДС оболочки во времени под действием зависящих от времени осесимметричных нагрузок и температурного поля. По величине прогибов или перемещениях края, в случае, если заранее определены максимально допустимые в эксплуатации деформации, оценивать работоспособность оболочки. По характеру роста прогибов во времени получать критическое время $t_{кр}$ при выпучивании.

в) исследовать неосесимметричную потерю устойчивости по бифуркации процесса деформации. При заданном изменении внешних нагрузок со временем определять критическое время или для заданного момента времени находить соответствующую ему критическую нагрузку.

На всех этапах вычислительного процесса выдерживался порядок точности не ниже второго по все накапливаемым погрешностям. Рассматривался ряд одномерных задач ползучести и релаксации с учетом разгрузки, имеющих точное решение. Деформация ползучести на шаге определялась простым шаговым методом Эйлера (ПШМ) или модифицированным методом Эйлера-Коши с итерациями (МШП) [1]. Шаг выбирался автоматически из условия, что относительное изменение решения на шаге не превышает 5%.

Скорость полной деформации, состоящая из суммы упруго-пластической деформации и деформации ползучести, соответственно $\dot{\varepsilon}^{ep}$ и $\dot{\varepsilon}^c$, задавалась некоторой функцией времени $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^{ep} + \dot{\varepsilon}^c = \varphi(t)$.

Если представить $\dot{\varepsilon}^{ep}$ в виде $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\dot{\sigma}}{E_k}$ для случая нагрузки и $\frac{\dot{\sigma}}{E}$ в случае разгрузки, а $\dot{\varepsilon}^c$ в виде $K\sigma^N$, где N все искомые функции можно определить из системы уравнений

$$\dot{\varepsilon} = \varphi(t), \quad \dot{\varepsilon}^c = K\sigma^N, \quad \dot{\sigma} = E_k(\varphi(t) - K\sigma^N), \quad \dot{\varepsilon}^{ep} = \varphi(t) - K\sigma^N.$$

Кривая мгновенного деформирования, $K = 0,60855 \cdot 10^{-16}$ $N = 11,6$ взяты из [12] для материала Д16АТ при температуре 300^0C .

Первая задача. Ее решение иллюстрируют рисунки 1,2

Функция $\varphi(t) = 0$, то есть полная деформация постоянна и равна $0,34 \cdot 10^{-2}$, на рис.1 она изображена кривой 1, распределение упруго-пластической деформации, полученной из точного решения представлено кривой 2, а деформация ползучести кривой 3. Деформации $\varepsilon^{ep}(t)$ и $\varepsilon^c(t)$, полученные при помощи ПШМ, представляют кривые 2 и 3 соответственно. Решение, полученное с использованием МШМ, отличается от точного в четвертом знаке.

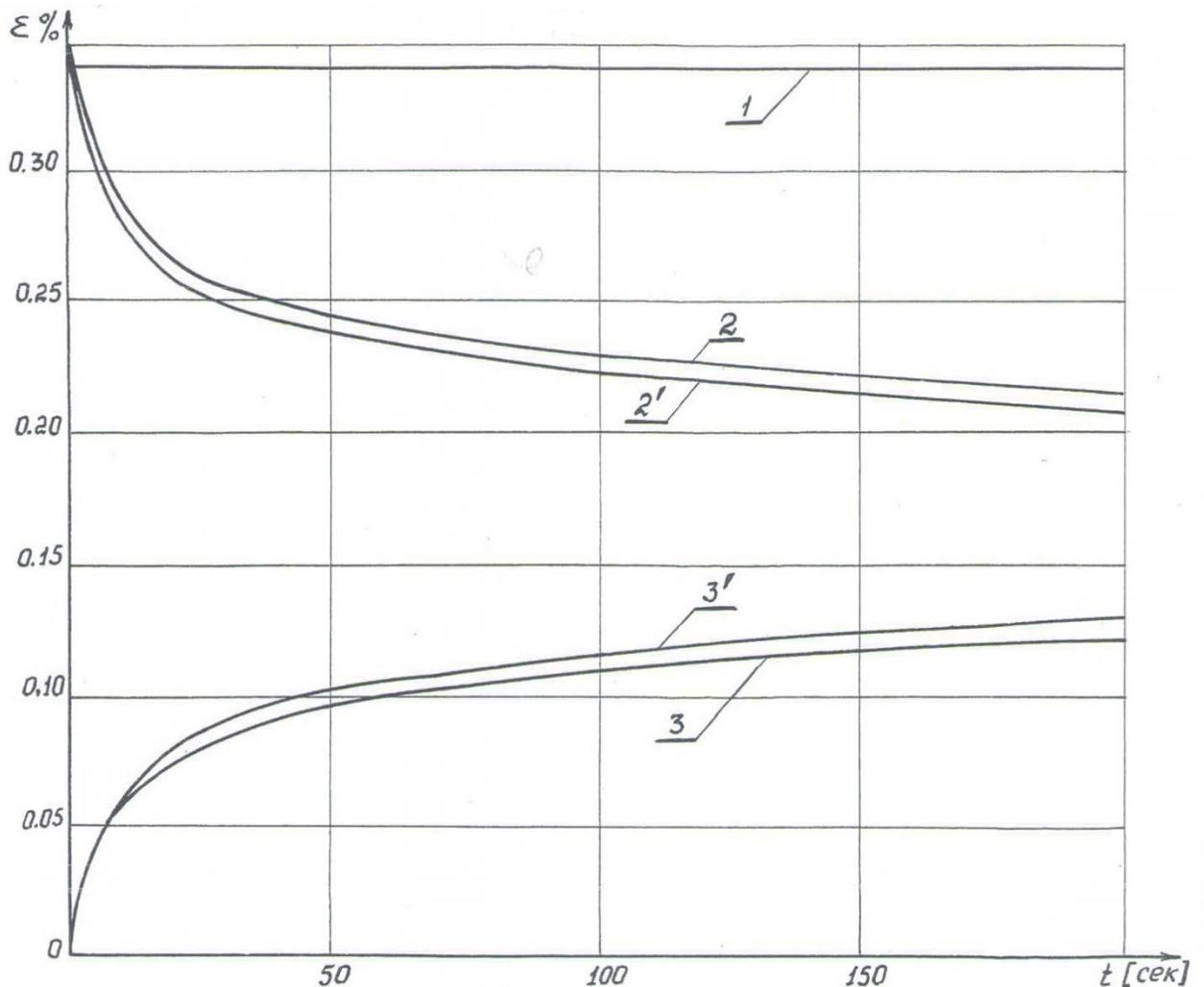


Рис.1. Распределение упруго-пластической деформации и деформации ползучести (рис. автора)

На рис.2 кривой 1 изображена релаксация напряжений со временем, полученная при помощи точного решения и МПШ, а кривой 1' - при использовании ПШМ. Кривая 2 иллюстрирует релаксацию напряжений, полученную методом изохронных кривых [2]. Из сравнения кривых, полученных при помощи ПШМ и МШМ видно, что ошибка определения напряжения и деформации при использовании ПШМ составляет 2-3%, а ошибка нахождения времени 10-12%.

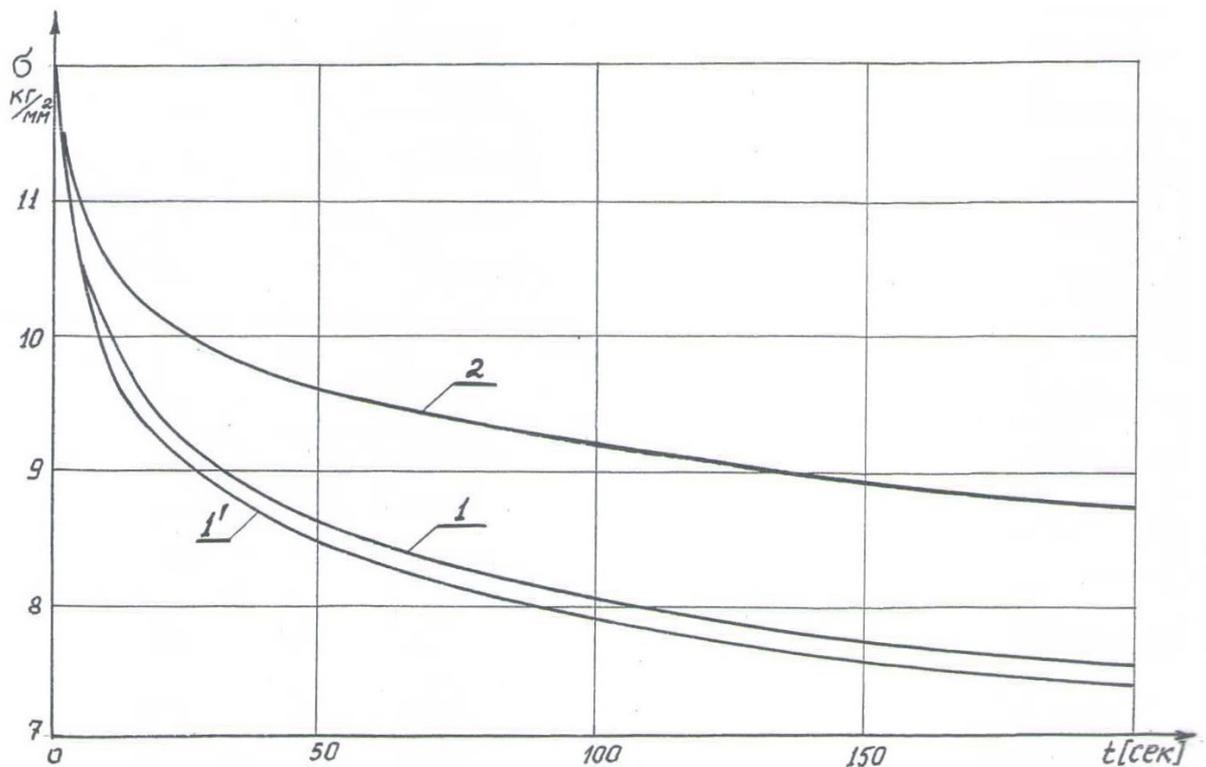


Рис.2. Релаксация напряжений во времени (рис. автора)

Вторая задача. Решение этой задачи представлено на рис.3,4

Функция $\varphi(t)$ задана постоянной величиной, равной скорости деформации ползучести для напряжения 12 кг/мм^2 . Рассмотрим два случая.

В первом случае полная деформация в начальный момент времени равна нулю, полученные при этом решения изображены сплошными линиями; во втором случае полная деформация в начальный момент времени равна $0,65 \cdot 10^{-2}$, все кривые, иллюстрирующие решение в этом случае, -пунктирные.

На рис.3 кривыми 1 представлено изменение во времени полной деформации ε . Кривые 2 и 3 иллюстрируют $\varepsilon^{ep}(t)$ и $\varepsilon^{ec}(t)$, полученные при помощи точного решения, а кривые 2' и 3' - соответствующие деформации, полученные с использованием ПШМ.

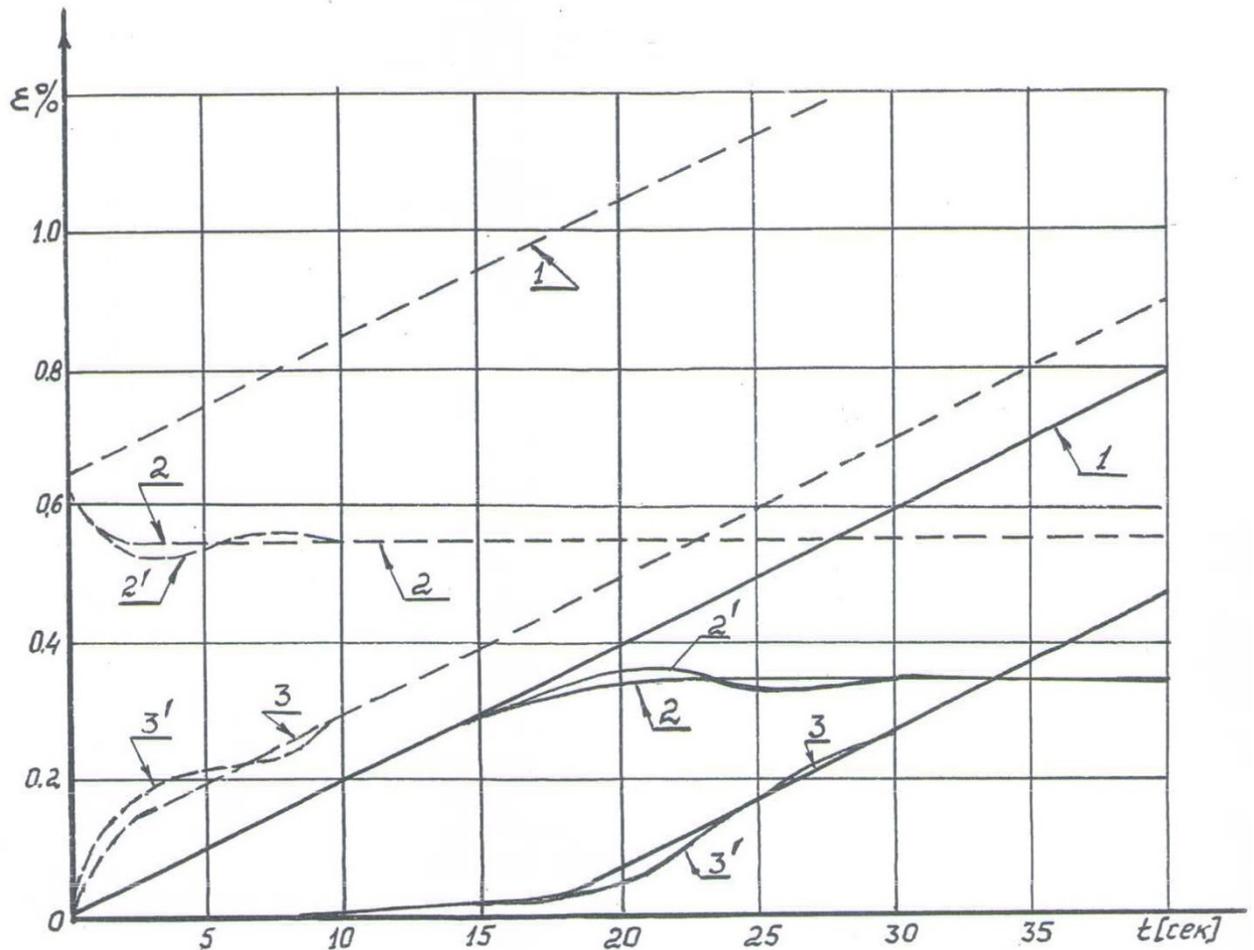


Рис.3. Изменение во времени полной деформации (рис. автора)

На рис.4 кривой 1 дано изменение со временем напряжения в случае точного решения, кривой 1' - ПШМ. Решение по МШМ отличается от точного в пятом знаке. Кривой 2 представлена зависимость напряжения от времени в случае метода изохронных кривых. Кривая 3 показывает, для сравнения, зависимость напряжения от времени в случае, если деформацию ползучести не учитывать.

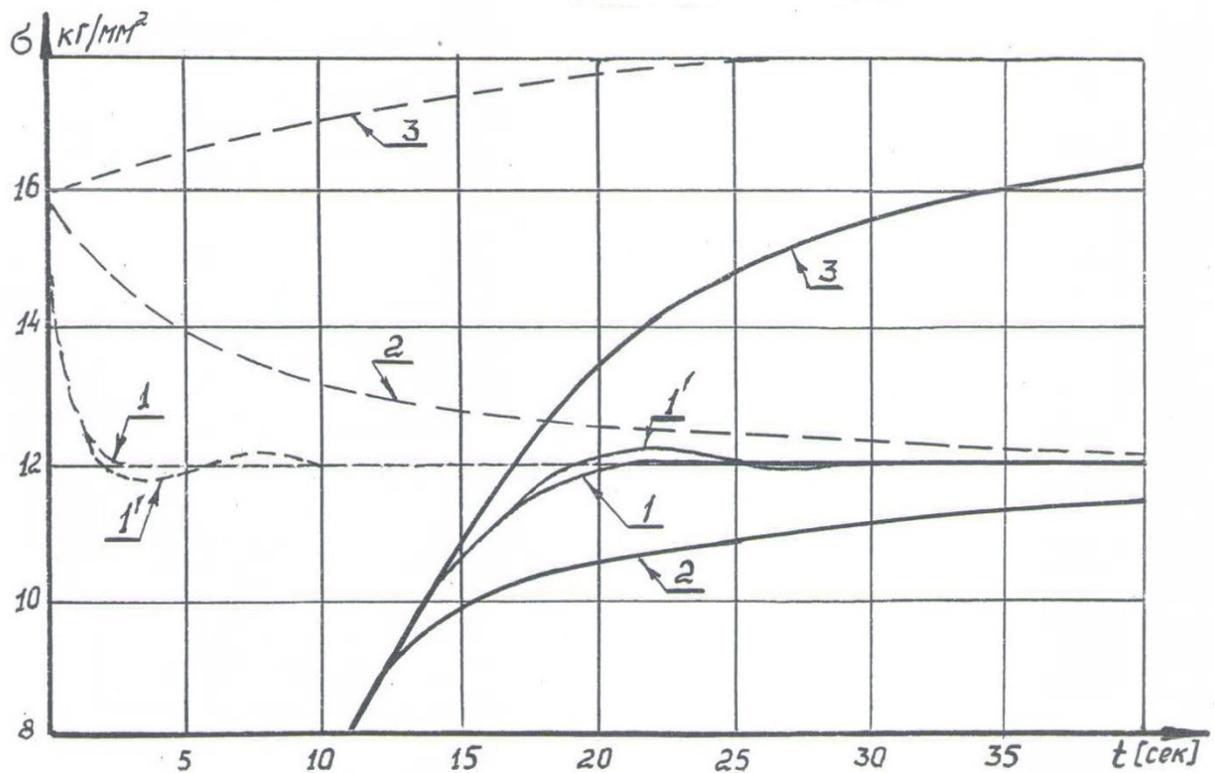


Рис.4. Изменение во времени напряжения (рис. автора)

Третья задача. Полученные при ее решении зависимости представлены на рис.5,6. Функция $\varphi(t)$ задавалась следующим образом: при $t < 10$ сек. $\varphi(t)$ равнялась $0,5 \cdot 10^{-3}$; при $10 \leq t \leq 30$ сек. $\varphi(t)$ равнялась $0,725 \cdot 10^{-3} - 0,225 \cdot 10^{-4} \cdot t$; при $t > 30$ сек. $\varphi(t) = 0,5 \cdot 10^{-4}$. На рис.5 кривыми 1,2,3 показаны зависимости от времени точных значений деформаций $\varepsilon, \varepsilon^{ep}, \varepsilon^{ec}$ соответственно.

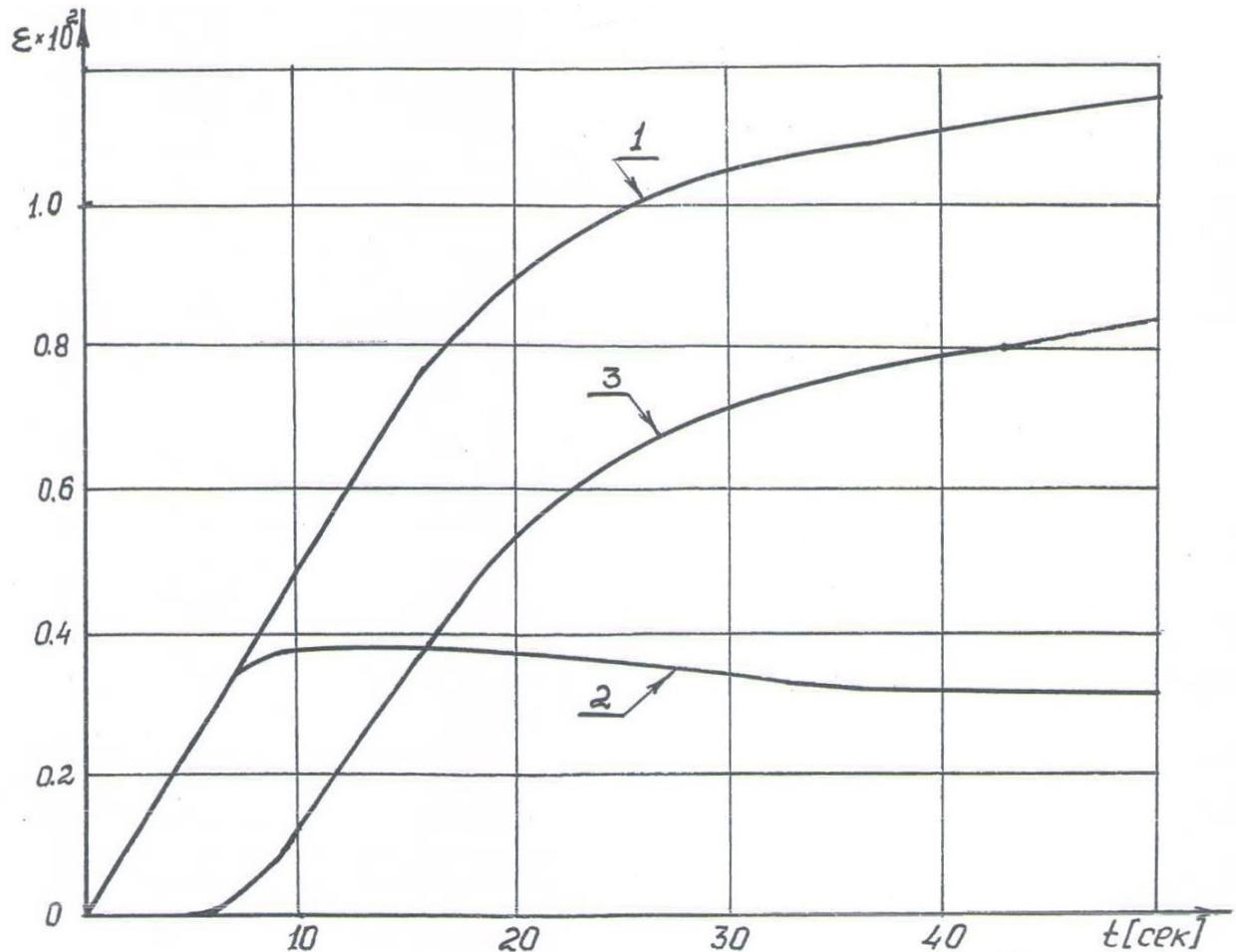


Рис.5. Зависимости от времени упруго-пластической деформации и деформации ползучести при переменной полной деформации (рис. автора)

На рис.6 кривой 1 представлено изменение во времени точного значения напряжения, кривой 2 - методом изохронных кривых, а кривой 3 - без учета ползучести. Решение по МШП отличается от точного меньше чем на 0,1%

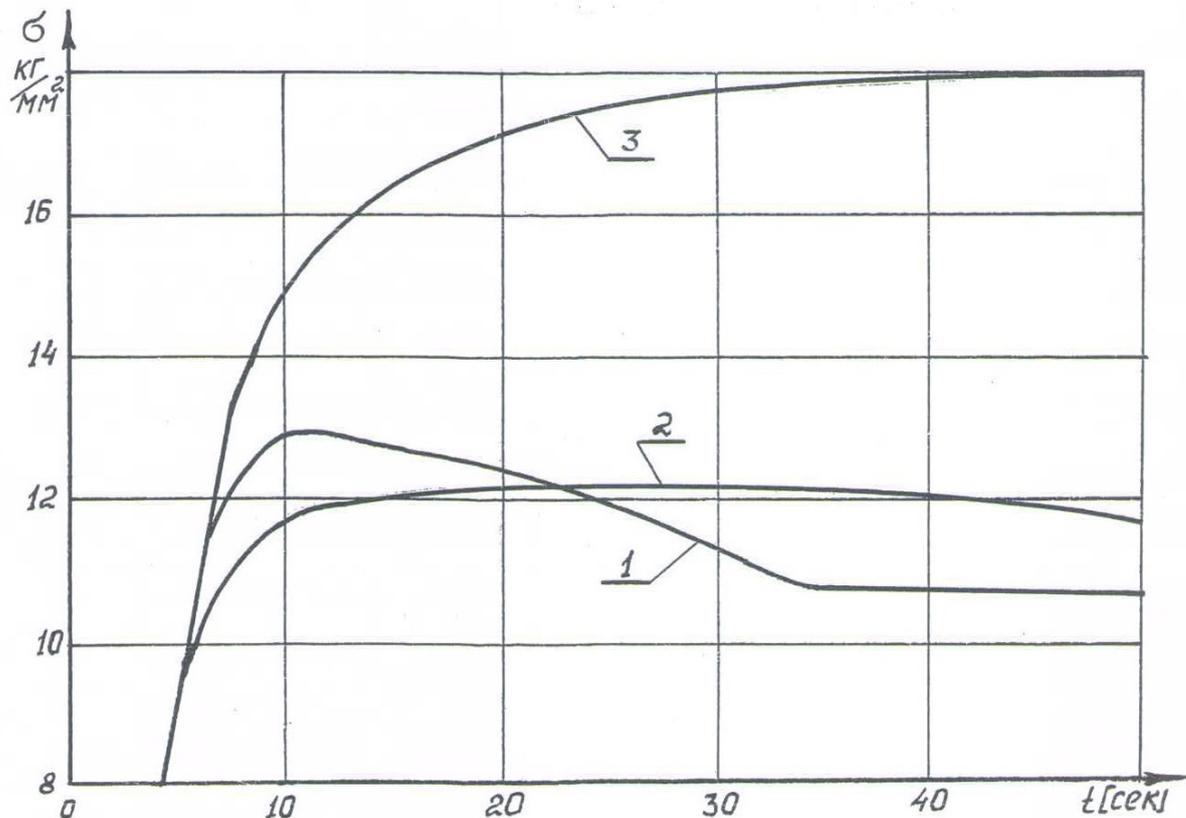


Рис.6. Кривые напряжения (рис. автора)

Четвертая задача. Полученные зависимости представлены на рис.7,8.

Функция $\varphi(t)$ равнялась $0,8 \cdot 10^{-3} - t \cdot 0,32 \cdot 10^{-4}$. На рис.7 кривыми 1,2,3 показаны точные зависимости $\varepsilon(t)$, $\varepsilon^{ep}(t)$, $\varepsilon^c(t)$ соответственно.

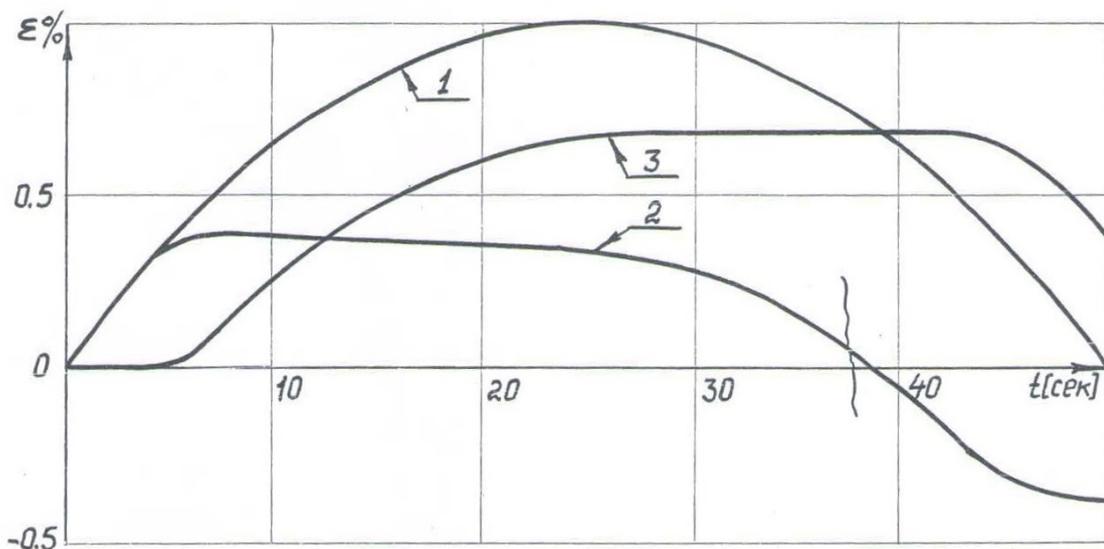


Рис.7. Зависимости деформации от времени (точные решения) (рис. автора)

На рис.8 кривой 1 показано изменение истинного напряжения со временем. Точность решения по МШМ такая же, как и выше, до $t \sim 37$ сек. Далее точность теряется, т.к. $E_c^{(0)} \rightarrow 0$. Кривой 2 дана зависимость напряжения от времени, определенная при помощи метода изохронных кривых.

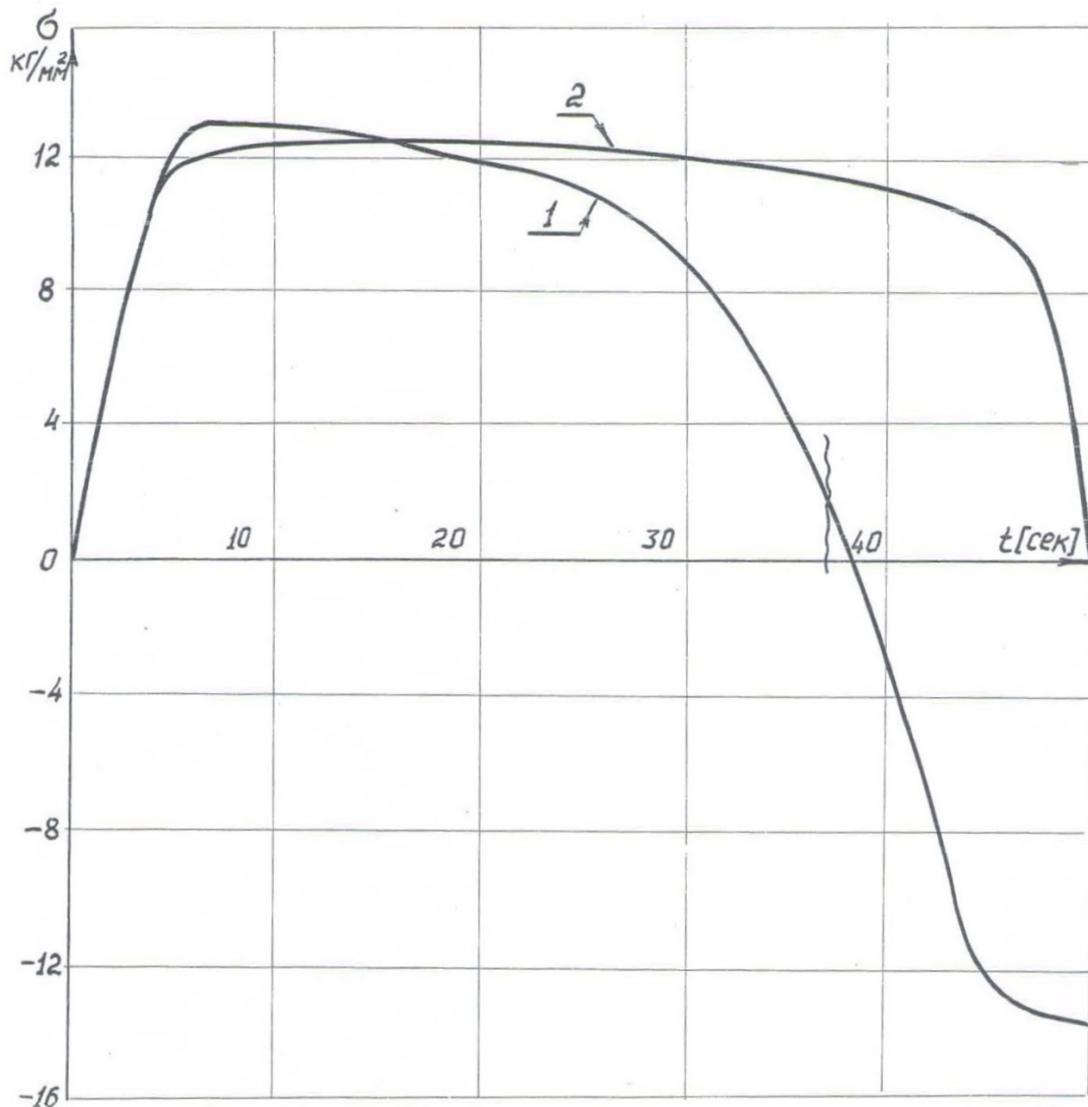


Рис.8. Изменение истинного напряжения во времени (рис. автора)

ВЫВОДЫ. Описан конечно-разностный метод численного решения краевых задач прочности и устойчивости оболочек вращения в условиях ползучести с учетом физической и геометрической нелинейности. Приведены результаты решения ряда задач различными численными методами, показаны точные

решения. Анализ полученных решений показал, что отличие искомых функций, полученных при помощи МШП, составляет 0,1%.

При резком изменении рассматриваемых функций от времени ПШМ дает отличие от точного до 15%. При сильной изменяемости искомых величин необходимо применение автоматического выбора шага интегрирования для экономии машинного времени и сохранения точности решения. Как следовало ожидать, метод изохронных кривых дает приемлемое решение лишь при слабо изменяющемся во времени напряженно-деформированном состоянии.

Библиографический список

1. Бахвалов И.С. Численные методы / И.С. Бахвалов. – М.: МГУ им М.В. Ломоносова, 2005. – 636 с.
2. Биргер И.А. Термопрочность деталей машин / И.А. Биргер, Б.Ф. Шофф. – М.: Изд-во Машиностроение, 1995. – 297 с.
3. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. Часть 1 / А.С. Вольмир. – М.: Изд-во Наука, 1989. – 325 с.
4. Вольмир А.С. Устойчивость оболочек при ползучести / А.С. Вольмир, П.Г. Зыкин // Сб. Тепловые напряжения в элементах турбомашин, №2, 1988.
5. Григолюк Э.И. Устойчивость оболочек в условиях ползучести / Э.И. Григолюк, Ю.В. Липовец // ПМТФ. – 1982. - №4.
6. Димитриенко Ю.И., Нелинейная механика сплошной среды / Ю.И. Димитриенко. – М.: Физматгиз, 2005. – 624 с.
7. Димитриенко Ю.И. Разработка численного метода расчета эффективных упругих характеристик композиционных материалов / Ю.И. Димитриенко,

- А.П. Соколова. – Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана, сер. "Естественные науки", №2, 2008. – С. 50-57.
8. Дубровин В.М. Моделирование процесса ползучести конструкционных материалов / В.М. Дубровин, Т.А. Бутина // Инженерный журнал " Наука и инновации". – 2013. - №9(21) – 18 с.
9. Качанов Л.М. Теория ползучести – М.: Физматгиз, 1960. – 389 с.
10. Милейко С.Т. Кратковременная ползучесть / С.Т. Милейко, Ю.И. Работнов. – М.: Изд-во Машиностроение, 1985. – 298 с.
11. Муштари Х.М. Нелинейная теория упругих оболочек / Х.М. Муштари, Г.З. Галимов. – Казань: Таткнигиздат, 1985. – 437 с.
12. Работнов Ю.И. Ползучесть элементов конструкций – М.: Наука, 1999. – 365 с.

Оригинальность 83%