УДК 539.3

DOI 10.51691/2541-8327_2022_12_28

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА АСИМПТОТИЧЕСКОГО ОСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ПЬЕЗОУПРУГОСТИ

Димитриенко Ю.И.

д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана,

Москва, Россия

Зубарев К.М.

Старший преподаватель кафедры

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана,

Москва, Россия

Крылов А.В.

студент

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана,

Москва, Россия

Аннотация. В этой работе рассматривается метод асимптотического осреднения, также известный как метод осреднения Бахвалова- Победри. Метод используется для нахождения эффективных характеристик слоистого композита. Все результаты вычислений и графики компонент, рассматриваемые в данной работе, реализованы на языке Python. В статье разбираются два разных двухслойных композита, причем первый состоит из слоев турмалина и кварца, а второй – из сегнетовой соли и титаната бария. Для

каждого были получены эффективные характеристики и графики зависимостей компонент от ширины слоев.

Ключевые слова: композиционные материалы, пьезоэлектроупругость, метод асимптотического осреднения.

APPLICATION OF THE ASYMPTOTIC AVERAGING METHOD FOR THE LINEAR PIEZOELASTICITY PROBLEM

Dimitrienko Yu. I.

doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, head of the departament

Bauman Moscow state technical University,

Moscow, Russia

Zubarev K. M.

Senior Lecturer

Bauman Moscow state technical University,

Moscow, Russia

Krylov A.V.

student

Bauman Moscow state technical University,

Moscow, Russia

Abstract. In this paper, the asymptotic averaging method, also known as the Bakhvalov-Pobedri averaging method, is considered. The method is used to find the effective characteristics of a layered composite. All the results of calculations and graphs of components considered in this paper are implemented in Python. The article deals with two different two–layer composites, the first consisting of layers of tourmaline and α-quartz, and the second of seignette salt and barium titanate. For each, effective characteristics and graphs of component dependencies on the volume of layers were obtained.

Key words: composite materials, piezoelectroelasticity, asymptotic averaging method.

Введение

В наши дни заметно вырос интерес к использованию различных методик моделирования передовых материалов с нестандартными и нелинейными свойствами и характеристиками, что особенно актуально в связи с развитием в области нанотехнологий [2,3,4,6].

В машиностроительной, судостроительной, авиационной, космической отрасли, строительству и прочих областях производства и промышленности предъявляются особые требования к материалам, которые используются в создании устройств и приборов. Эти требования относятся, в основном, к их свойствам и характеристикам.

Современная вычислительная техника также не стоит на месте и активно развивается, позволяя получать более точные и быстрые решения к различным проблемам, что также повышает интерес к изучению и использованию инновационных методов моделирования [2,3].

Одним из таких методов является метод асимптотического осреднения (МАО), или метод гомогенизации, поскольку он способен предоставить значительные возможности для создания новых методик решения. В данной работе предлагается применение этого способа при изучении композиционных материалов с линейными свойствами пьезоупругости [1].

Решение данной задачи основано на таких явлениях как прямой пьезоэффект, так и обратный. При воздействии на некоторые кристаллы механического напряжения возникает дипольный момент[9]. Данное явление и есть суть прямого пьезоэффекта. В [9] аналогично определяют такие величины, как модули пьезоэлектричества, а также показывается, что данные характеристики есть компоненты тензора третьего ранга. Большинство теоретических предположений данной работы основываются на определениях и выводах, описанных и полученных в [9].

Линейная задача пьезоупругости

Мы рассматриваем пьезоэлектрический композит с рекуррентной структурой, пьезомеханическое поведение которого описывается смешанной начально-краевой задачей [1,10]:

$$\begin{gathered}\sigma_{ij,j}=0; \qquad D_{i,i}=0;\\ \sigma_{ij}=C_{ijkl}u_{k,l}+\nu_{kij}\varphi_{,k}; \quad D_i=\nu_{ikl}u_{k,l}-э_{ik}\varphi_{,h};\\ u_i\big|_{\Sigma_1}=u_i^0;\ \ \varphi\big|_{\Sigma_3}=\varphi^0;\ \ \sigma_{ij}n_j\big|_{\Sigma_2}=S_i^0; \quad D_i n_i\big|_{\Sigma_4}=\sigma^0.\end{gathered} \tag{1}$$

Так как структура композита периодична, у нее можно выделить ячейку периодичности V_ξ и согласно методу асимптотического осреднения, ввести малый параметр $\kappa=\dfrac{l}{L}\ll 1$, где l – характерный размер ячейки периодичности (ЯП) V_ξ [5].

Введём безразмерные координаты: $\tilde{x}^s=x^s/L$ – глобальные координаты и $\xi^i=\tilde{x}^i/\kappa$ – локальные координаты, причем $V_\xi=\{\xi^i\,|-0.5<\xi^i<0.5\}$.

Согласно МАО решение линейной задачи пьезоупругости построим в виде следующих асимптотических разложений:

$$u_i\left(\overline{x},\xi\right)=u_i^{(0)}(\overline{x})+ku_i^{(1)}(\overline{x},\xi)+k^2u_i^{(2)}(\overline{x},\xi)+...= \\ =u_i^{(0)}(\overline{x})+\sum_{n=1}^{\infty}k^n u_i^{(n)}(\overline{x},\xi)\ , \tag{2}$$

$$\varphi\left(\overline{x},\xi\right)=\varphi^{(0)}(\overline{x})+k\varphi^{(1)}(\overline{x},\xi)+k^2\varphi^{(2)}(\overline{x},\xi)+...= \\ =\varphi^{(0)}(\overline{x})+\sum_{n=1}^{\infty}k^n\varphi^{(n)}(\overline{x},\xi).$$

Следуя методу усреднения, мы находим [7], что средние значения перемещений $<u_i>=\upsilon_i$, электрического потенциала $<\varphi>=\psi$ являются решением следующей усредненной начально-краевой задачи:

$$<\sigma_{ij}>_{,j}=0; \qquad <D_i>_{,i}=0; \\ <\sigma_{ij}>=\hat{C}_{ijmn}\upsilon_{m,n}+\hat{\nu}_{mij}\psi_{,m}; \quad <D_i>=\hat{\nu}_{imn}\upsilon_{m,n}-\hat{э}_{im}\psi_{,m}; \\ \upsilon_i\big|_{\Sigma_1}=u_i^0;\ \psi\big|_{\Sigma_3}=\varphi^0;\ <\sigma_{ij}>n_j\big|_{\Sigma_2}=S_i^0; \quad <D_i>n_i\big|_{\Sigma_4}=\sigma^0. \tag{3}$$

Мы определяем эффективные характеристики рассматриваемой задачи по формулам:

$$\overline{C}_{ijmn}=<C_{ijkl}M_{kmn|l}+\nu_{kij}N_{mn|k}+C_{ijmn}> \tag{4}$$
$$\overline{\nu}_{mij}=<C_{ijhl}M_{km|l}+\nu_{kij}N_{m|k}+\nu_{mij}> \tag{5}$$
$$\overline{э}_{im}=<-\nu_{ikl}M_{km|l}+э_{ik}N_{m|k}+э_{im}> \tag{6}$$

Далее мы имеем дело с многослойным пьезоэлектрическим композитом с рекуррентной структурой, т.е. мы предполагаем, что C_{ijkl}, ν_{kij}, $э_{ik}$ являются периодическими функциями одной координаты, например, x_3. Тогда задача о рекуррентной ячейке принимает вид:

$$(C_{i3k3}M_{kmn|3}+\nu_{3i3}N_{mn|3}+C_{i3mn})_{|3}=0, \\ (-\nu_{3k3}M_{kmn|3}+э_{33}N_{mn|3}-\nu_{3mn})_{|3}=0. \tag{7}$$

Интегрируя эту систему обыкновенных дифференциальных уравнений один раз и разрешая полученные равенства относительно $M_{kmn|3}$ и $N_{mn|3}$, мы находим

$$\begin{gathered} M_{kmn|3} = A_{kl}a_{lmn} - B_k b_{mn} - D_{kmn}, \\ N_{mn|3} = B_l a_{lmn} + Cb_{mn} - E_{mn}. \end{gathered} \tag{8}$$

где $(A_{kl})_{3\times3} = (C_{3kl3} + э_{33}^{-1}\nu_{3k3}\nu_{3l3})_{3\times3}^{-1}$,

$B_k = э_{33}^{-1}A_{kl}\nu_{3l3}$,

$C = э_{33}^{-1}(1 - B_l\nu_{3l3})$,

$D_{kmn} = A_{kl}(C_{3lmn} + э_{33}^{-1}\nu_{3l3}\nu_{3mn})$,

$E_{mn} = э_{33}^{-1}(\nu_{3l3}D_{lmn} - \nu_{3mn})$,

$(F_{kl})_{3\times3} = (< A_{kl} > + < C >^{-1} < B_l >< B_k >)_{3\times3}^{-1}$,

$a_{lmn} = F_{lk}(< D_{kmn} > + < C >^{-1} < B_k >< E_{mn} >)$,

$b_{mn} =< C >^{-1} (< E_{mn} > - < B_l > a_{lmn})$.

Тогда получим выражение для эффективного тензора упругости:

$$\begin{gathered} \bar{C}_{ijmn} =< C_{ijk3}A_{kl} + \nu_{3ij}B_l > a_{lmn} + < -C_{ijk3}B_k + \nu_{3ij}C > b_{mn} \\ + < C_{ijmn} - C_{ijk3}D_{kmn} - \nu_{3ij}E_{mn} >. \end{gathered} \tag{9}$$

Аналогично получим выражения для $M_{km|3}$ и $N_{m|3}$:

$$\begin{gathered} M_{km|3} = A_{kl}a_{lm} - B_k b_m - D_{km}, \\ N_{m|3} = B_l a_{lm} + Cb_m - E_m, \end{gathered} \tag{10}$$

где $D_{km} = A_{kl}(\nu_{m3l} - э_{33}^{-1}\nu_{3l3}э_{3m})$,

$E_m = э_{33}^{-1}(\nu_{3l3}D_{lm} + э_{3m})$,

$a_{lm} = F_{lk}(< D_{km} > + < C >^{-1} < B_k >< E_m >)$,

$b_m = < C >^{-1} (< E_m > - < B_l > a_{lm})$.

Аналогично находим остальные эффективные характеристики:

$$\begin{aligned}\bar{\nu}_{mij} = &< C_{ijk3}A_{kl} + \nu_{3ij}B_l > a_{lm} + < -C_{ijk3}B_k + \nu_{3ij}C > b_m + \\ &+ < \nu_{mij} - C_{ijk3}D_{km} - \nu_{3ij}E_m >,\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\bar{э}_{im} = &< -\nu_{ik3}A_{kl} + э_{i3}B_l > a_{lm} + < \nu_{ik3}B_k + э_{i3}C > b_m + \\ &+ < э_{im} + \nu_{ik3}D_{km} - э_{i3}E_m >.\end{aligned} \tag{12}$$

Расчётная часть

Рассмотрим двухслойный композит 1, состоящий из слоя турмалина, обладающего тригональным (В-ромбоэдрическим) классом симметрии с группой анизотропии 3m (табл. 1) и слоя α-кварца (табл. 2), также обладающего тригональным классом симметрии, но с группой анизотропии 32:

Таблица 1 – Константы турмалина (c_{ijkl} в ГПа, ν_{ijk} в Кл/м^2, $э_{ij}$ в 10^{-10} Ф/м)

Компонента	C'_{1111}	C'_{1122}	C'_{3333}	C'_{2323}	ν'_{131}	ν'_{311}	ν'_{333}	$э'_{11}$	$э'_{33}$
Значение	2,700	0,69	1,61	0,67	0,247	0,103	0,320	0,598	0,489

Таблица 2 – Константы α-кварца (c_{ijkl} в ГПа, ν_{ijk} в Кл/м^2, $э_{ij}$ в 10^{-10} Ф/м)

Компонента	C'_{1111}	C'_{1122}	C'_{1133}	C'_{1123}	C'_{3333}	C'_{2323}	ν'_{111}	ν'_{123}	$э'_{11}$	$э'_{33}$
Значение	0,868	0,060	0,119	-0,178	1,07	0,578	0,171	0,040	0,400	0,410

В таблице 3 предоставлены результаты вычисления программы, разработанной на Python:

Таблица 3 – Эффективные характеристики композита 1

Компонента	$\overline{C}_{1111}$	$\overline{C}_{2222}$	$\overline{C}_{3333}$	$\overline{v}_{111}$	$\overline{v}_{222}$	$\overline{v}_{311}$	$\overline{э}_{11}$	$\overline{э}_{33}$
Значение	1.785	1.779	1.32	0.087	0,001	0,112	0,524	0,461
Компонента	$\overline{C}_{1133}$	$\overline{C}_{1123}$	$\overline{C}_{2323}$	$\overline{v}_{333}$	$\overline{v}_{112}$	$\overline{v}_{213}$	$\overline{э}_{21}$	$\overline{э}_{13}$
Значение	0.121	-0.132	0.621	0,047	-0.001	-0.021	0	0

Полученные результаты можем представить в виде графиков зависимости эффективных характеристик от концентрации соответствующих слоев (ширины слоев). Ниже на рисунке 1 изображена зависимость эффективных компонент тензора модуля упругости от концентрации слоя турмалина:

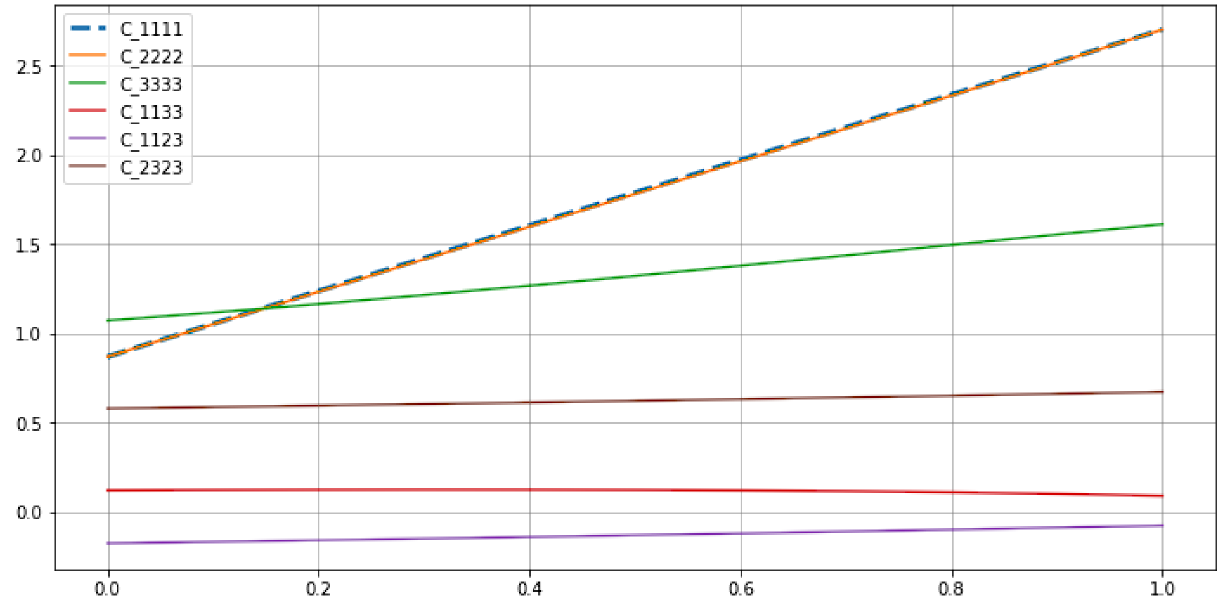

Рис. 1 – График зависимости компонент тензора c_{ijkl} от концентрации турмалина в композите. Авторская разработка.

Ниже на рисунке 2 изображена зависимость эффективных компонент тензора v_{ijk} от концентрации слоя турмалина:

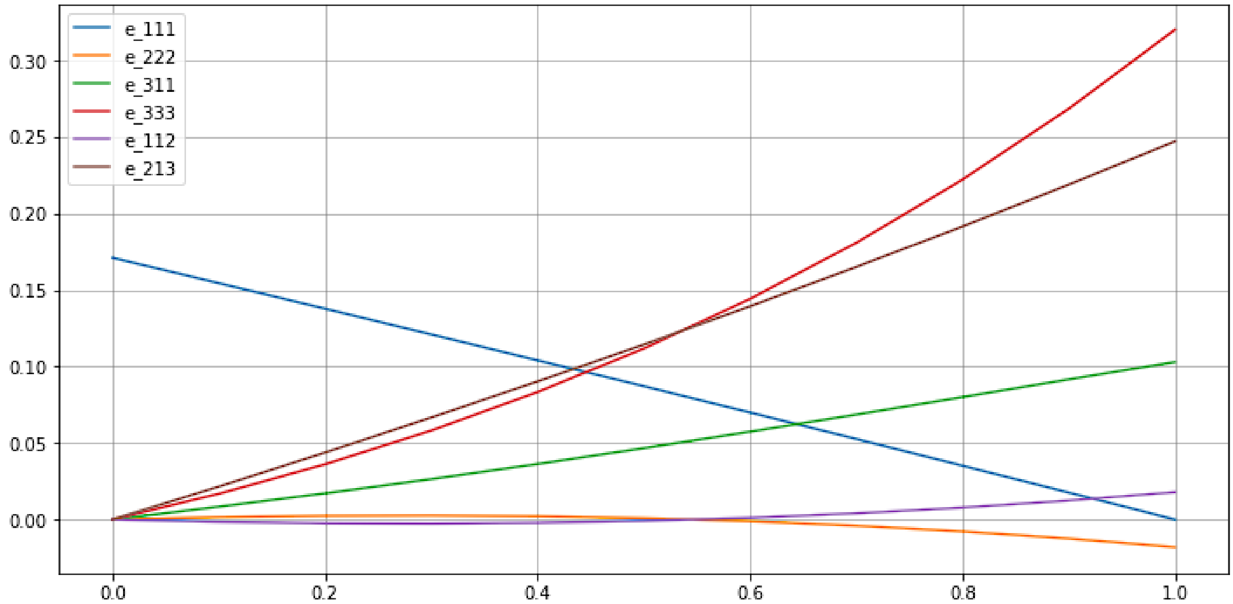

Рис. 2 – График зависимости компонент тензора v_{ijk} от концентрации турмалина в композите. Авторская разработка.

Ниже на рисунке 3 изображена зависимость эффективных компонент тензора диэлектрических постоянных от концентрации слоя турмалина:

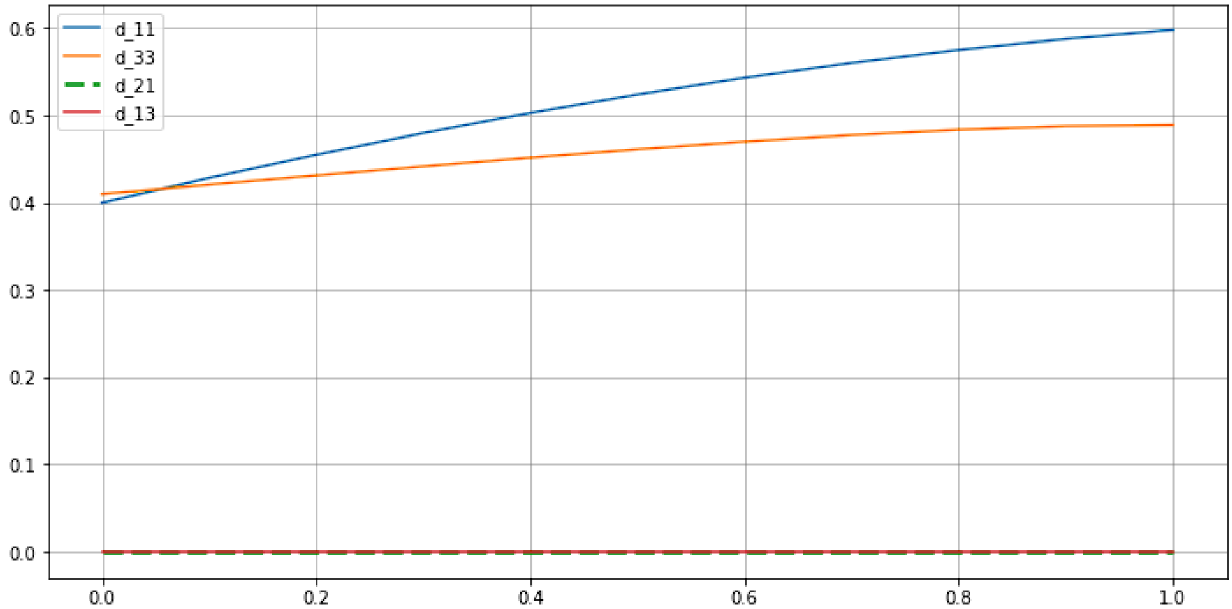

Рис. 3 – График зависимости компонент тензора $э_{ij}$ от концентрации турмалина в композите. Авторская разработка.

В качестве дополнительного примера рассчитаем эффективные характеристики для двухслойного композита 2, состоящий из слоя сегнетовой соли, обладающей ромбическим классом симметрии с группой анизотропии 222 (табл. 4) и слоя титаната бария (табл. 5), обладающего гексагональным классом симметрии, с группой анизотропии 6mm, с объемными концентрациями 0.3 и 0.7 соответственно:

Таблица 4 – Константы сегнетовой соли (c_{ijkl} в ГПа, ν_{ijk} в Кл/м^2, $э_{ij}$ в 10^{-10} Ф/м)

Компонента	C'_{1111}	C'_{1122}	C'_{3333}	C'_{2323}	ν'_{123}	ν'_{231}	ν'_{312}	$э'_{11}$	$э'_{33}$
Значение	0,425	0,296	1,89	0,125	5,0	0,081	0,058	17,7	0,814

Таблица 5 – Константы титанат бария (c_{ijkl} в ГПа, ν_{ijk} в Кл/м^2, $э_{ij}$ в 10^{-10} Ф/м)

Компонента	C'_{1111}	C'_{1122}	C'_{3333}	C'_{2323}	ν'_{131}	ν'_{311}	ν'_{333}	$э'_{11}$	$э'_{33}$
Значение	1,680	0,782	1,89	0,546	11,6	-4,40	18,6	112	126

В таблице 6 предоставлены результаты вычисления программы, разработанной на Python:

Таблица 6 – Эффективные характеристики двухслойного композита 2

Компонента	$\bar{C}_{1111}$	$\bar{C}_{2222}$	$\bar{C}_{3333}$	$\bar{\nu}_{311}$	$\bar{\nu}_{112}$	$\bar{\nu}_{113}$	$\bar{э}_{11}$	$\bar{э}_{33}$
Рассчитанное значение	1.4	1.43	1.59	-0.05	0	0.92	133.05	72.08
Компонента	$\bar{C}_{1133}$	$\bar{C}_{1123}$	$\bar{C}_{2323}$	$\bar{\nu}_{333}$	$\bar{\nu}_{123}$	$\bar{\nu}_{311}$	$\bar{э}_{21}$	$\bar{э}_{22}$
Рассчитанное значение	0.29	0	0.27	0.09	3.26	-0.05	-2.41	5.27

Полученные результаты вновь представим в виде графиков зависимости эффективных характеристик от концентрации соответствующих слоев (ширины слоев). Ниже на рисунке 4 изображена зависимость эффективных компонент тензора модуля упругости от концентрации слоя сегнетовой соли:

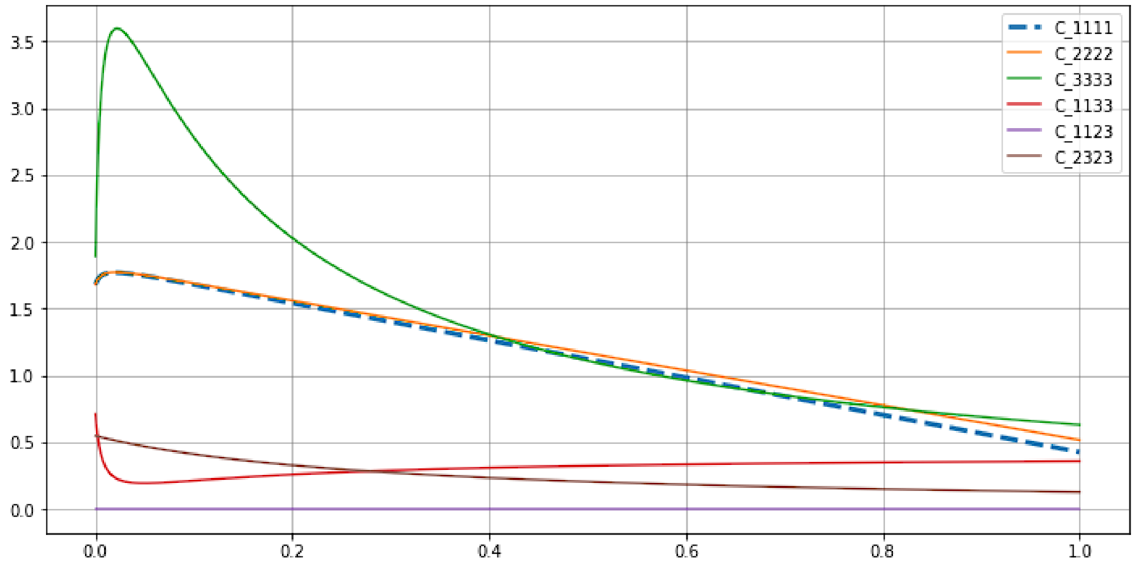

Рис. 4 – График зависимости компонент тензора c_{ijkl} от концентрации сегнетовой соли в композите. Авторская разработка.

Ниже на рисунке 5 изображена зависимость эффективных компонент тензора ν_{ijk} от концентрации слоя сегнетовой соли:

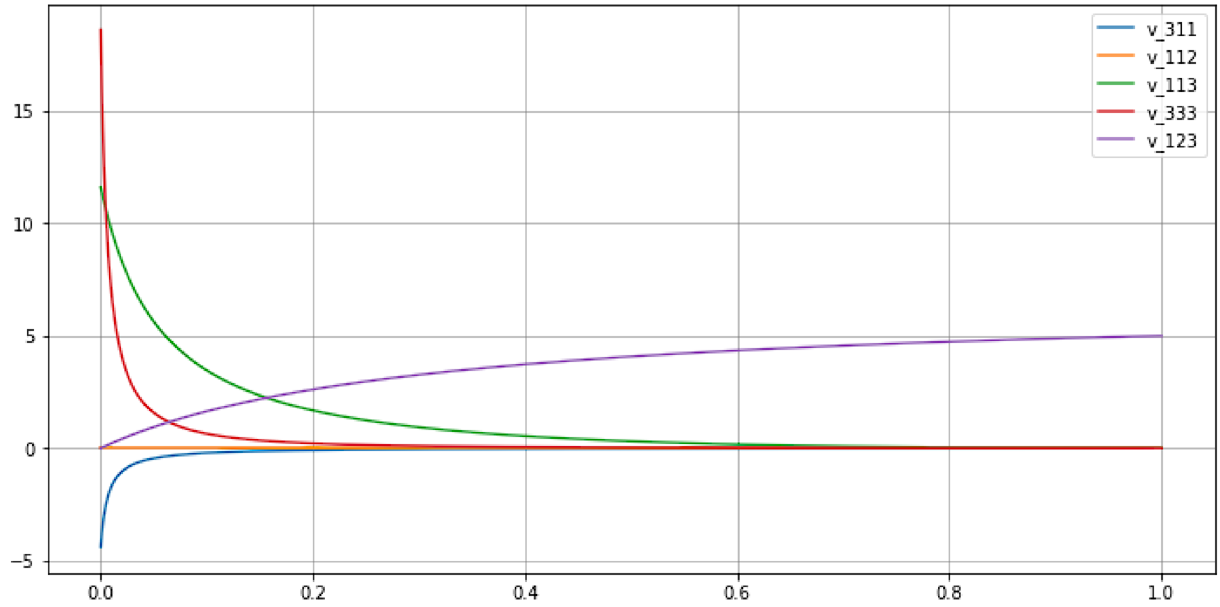

Рис. 5 – График зависимости компонент тензора v_{ijk} от концентрации сегнетовой соли в композите. Авторская разработка.

Ниже на рисунке 6 изображена зависимость эффективных компонент тензора диэлектрических постоянных от концентрации слоя сегнетовой соли:

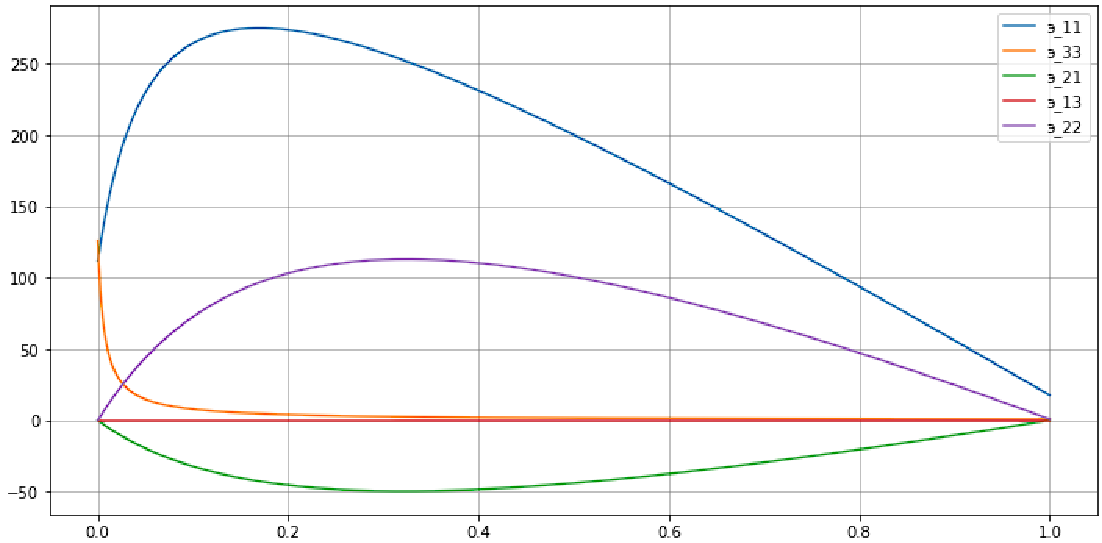

Рис. 6 – График зависимости компонент тензора $э_{ij}$ от концентрации сегнетовой соли в композите. Авторская разработка.

Выводы

В данной статье был применен метод асимптотического осреднения для линейной задачи пьезоупругости. В результате были получены эффективные характеристики рассмотренных двуслойных композитов.

Библиографический список

1. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах/ Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. - М.: «Наука», 1984. – 352 с.

2. Бин Ж. Wave propagation in two-layered infinite composite piezoelectric hollow cylinder with imperfect interfaces/ Бин Ж.// Piezoelectricity, Acoustic Waves, and Device Applications, 2008.

3. Вон Дж. - Can piezoelectricity lead to negative capacitance?/ Electron Devices Meeting (IEDM), 2014

4. Гао Ян. The refined theory of piezoelectric thick plates.– Piezoelectricity/ Acoustic Waves, and Device Applications (SPAWDA), 2009.

5. Димитриенко Ю.И., Морозов А.Н., Соколов А.П., Ничеговский Е.С. Моделирование эффективных пьезоупругих композиционных материалов/ Димитриенко Ю.И., Морозов А.Н., Соколов А.П., Ничеговский Е.С // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Серия "Естественные Науки". - 2010. – №3.

6. Каламкаров А.Л. Modeling of anisotroping magneto-piezoelastic materials/ Каламкаров А.Л. // Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory, 2016.

7. Каралюнас Р. И. Эффективные термопьезоэлектрические свойства слоистых композитов/ Каралюнас Р. И.// Механика композитных материалов. – 1990. – № 5. – С. 823–830.

8. Ландис Ч. Fully coupled, multi-axial, symmetric constitutive laws for polycrystalline ferroelectric ceramics/ Ландис Ч. // Журнал механики и физики твердого тела. – 2002. –№ 50. – С. 127-152

9. Най Дж. Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц. - М.:Издательство иностранной литературы, 1960. – 377 с.

10. Пурукава Т. - Piezoelectricity and pyroelectricity in ferroelectric polymers/ Electrets (ISE 5). 5th International Symposium, 1985.

11. Хубер Д., Флек Н., Ландис Ч. A constitutive model for ferroelectric polycrystals/ Хубер Д., Флек Н., Ландис Ч. // Журнал механики и физики твердого тела. – 1999. – №8. – С. 1663-1697

Оригинальность 91%