

УДК 519.146

***О НЕКОТОРЫХ АСПЕКТАХ ПРИМЕНЕНИЯ ГИПЕРПИРАМИДЫ
ПАСКАЛЯ***

Ершов Г. А.

Студент

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

Москва, Россия

Прозоровский А. А.

Ст. преподаватель

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

Москва, Россия

Аннотация В статье подробно разобрана гиперпирамида Паскаля, показаны её приложения в комбинаторике, теории графов и теории вероятностей. Приведены примеры. Представленные материалы могут быть интересны студентам, увлекающимся математикой и участвующим в олимпиадах.

Ключевые слова: пирамида Паскаля, гиперпирамида Паскаля, комбинаторика, графы, многогранники Эрхарта

***ON SOME ASPECTS OF THE APPLICATION OF PASCAL'S
HYPERPYRAMIDE***

Ershov G. A.

Student

Bauman Moscow State Technical University

Moscow, Russia

Prozorovsky A. A.

Senior lecturer

Bauman Moscow State Technical University

Moscow, Russia

Abstract The article examines in detail the Pascal hyperpyramid, and shows its applications to combinatorics, graph theory, and probability theory. Examples are given. The presented materials may be of interest to students who are interested in mathematics and participate in Olympiads.

Keywords: Pascal's pyramid, Pascal's hyperpyramid, combinatorics, graphs, Earhart polyhedra.

В комбинаторике хорошо известна пирамида Паскаля, тогда как её многомерный аналог (гиперпирамида Паскаля) разработана менее подробно [1].

Разъясним структуру гиперпирамиды Паскаля, для этого рассмотрим мультином Ньютона – по сути он является аналогией биннома Ньютона, распространённого на случай полинома трёх и более переменных:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_m=n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}, \quad (1)$$

где n, k_1, k_2, \dots, k_m – целые неотрицательные числа такие, что $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$,

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!} - \text{мультиномиальные коэффициенты.}$$

По аналогии с треугольником Паскаля для биннома Ньютона, коэффициенты разложения полинома вида $(x_1 + x_2 + \dots + x_q)^n$ на мономы можно однозначно определить при помощи такого геометрического объекта, как гиперпирамида Паскаля. Её 3-мерный случай – пирамида Паскаля изображена на Рисунке 1.

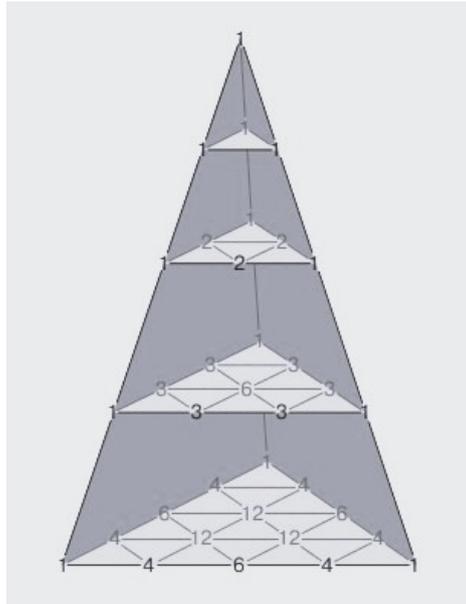


Рисунок 1 – Пирамида Паскаля. Авторская разработка

Пирамида Паскаля определяет коэффициенты разложения полинома $(x_1 + x_2 + x_3)^n$ на мономы.

Остановимся поподробнее на способе образования пирамиды Паскаля: гранями, определенно, являются треугольники Паскаля. Числа внутри пирамиды образуются по теореме Паскаля

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \quad (2)$$

с начальными условиями

$$\binom{0}{0} = 1, \quad \binom{n}{k} = 0 \text{ при } \min(n, k, n-k) < 0$$

и граничным условием

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Также для случая представления числа сочетаний в виде суммы 3 чисел сочетаний есть аналогичная формула:

$$\binom{n+1}{k,l} = \binom{n}{k-1,l} + \binom{n}{k,l-1} + \binom{n}{k,l} \quad (3)$$

Подробнее о свойствах чисел сочетаний и мультиномиальных коэффициентов, а также о рекуррентных соотношениях написано в [1; 4; 5]. При этом существует формула для “n – мерного случая”:

$$\binom{n+1}{k_1, k_2, \dots, k_{m-1}, k_m} = \binom{n}{k_1-1, k_2, \dots, k_{m-1}, k_m} + \binom{n}{k_1, k_2-1, \dots, k_{m-1}, k_m} + \dots + \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_{m-1}-1, k_m} + \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_{m-1}, k_m} \quad (4)$$

Таким образом, по аналогии с главным правилом образования треугольника Паскаля (теореме Паскаля), мы можем составить такое же характерное правило для чисел внутри пирамиды Паскаля: чтобы получить число внутри пирамиды, нам необходимо сложить три числа, располагающиеся “над” данным в предыдущем слое. Для примера рассмотрим механизм образования двух чисел 12 в пятом сечении пирамиды Паскаля, считая от вершины. На рисунке 2 показано пятое сечение пирамиды Паскаля и выделены числа 12, механизм образования которых мы исследуем, а на рисунке 3 – числа, при сложении которых образовано соответствующее число 12, соединенное с данными числами линиями соответствующего цвета.

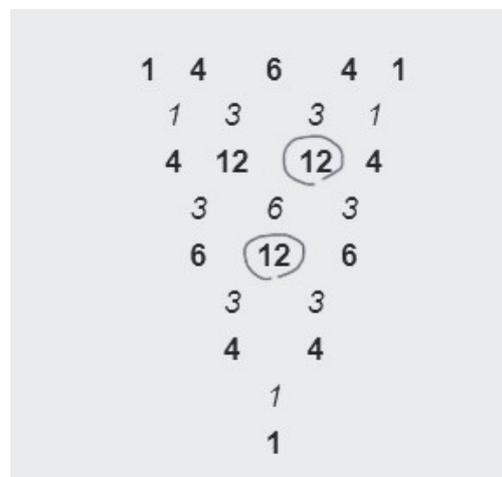


Рисунок 2 – Пятое сечение пирамиды Паскаля. Авторская разработка

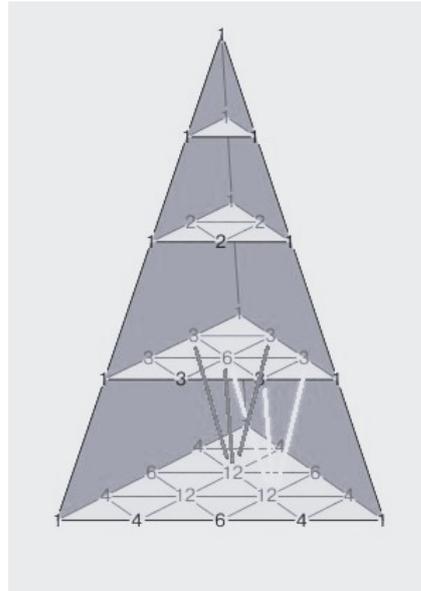


Рисунок 3 – Механизм образования чисел 12 в пятом сечении пирамиды Паскаля.
Авторская разработка

Количество мономов полной степени n от q переменных

Что же будет в случае увеличения размерности пирамиды Паскаля? Заметим, что при добавлении каждой новой переменной в скобку $(x_1 + x_2 + \dots + x_q)^n$ мы увеличиваем размерность гиперпирамиды Паскаля. При этом если останавливаться подробнее на рассмотрении каждого частного случая, то можно убедиться в том, что структура гиперпирамиды Паскаля сохраняется при каждом новом добавлении переменной “в скобку”.

Заметим следующее: всякий раз, когда нам приходилось считать количество различных мономов, получающихся после разложения исходного полинома $(x_1 + x_2 + \dots + x_q)^n$, мы вели подсчёт количества целочисленных точек, принадлежащих стандартному симплексу размерности $q-1$, увеличенному в n раз. Показать это довольно просто: рассмотрим пространство \mathbb{R}^q , оси координат которой составляют переменные x_1, x_2, \dots, x_q . При этом пусть L – целочисленная решётка в этом пространстве, координаты точек которой неотрицательны: $L = \mathbb{Z}^q \subset \mathbb{R}^q$.

Теперь возьмем сечение L гиперплоскостью π размерности q такой, что

$$\pi: x_1 + x_2 + \dots + x_q = n \quad (5)$$

При этом можно сказать, что данной плоскости будет принадлежать стандартный симплекс размерности $q-1$, а n – аргумент в многочлене Эрхарта для данного симплекса [6]. Отсюда получаем результат через теорию Эрхарта:

$$Q = L_{\Delta_{q-1}}(n) = C_{n+q-1}^n, \quad (6)$$

где Q – количество мономов полной степени n от q переменных, количество мономов полинома $(x_1 + x_2 + \dots + x_q)^n$,

$L_{\Delta_{q-1}}(n)$ – многочлен Эрхарта для $(q-1)$ -мерного симплекса.

Составим таблицу, в которой покажем количество мономов, соответствующее рассматриваемому полиному, определенное по полученной формуле (см. Таблицу 1).

Таблица 1 – Определение количества мономов полинома вида

$(x_1 + x_2 + \dots + x_q)^n$ при помощи формулы (6)

Полином	Количество мономов данного полинома
$(x + y + z)^1$	$Q = C_{1+3-1}^1 = \frac{3!}{1!2!} = 3$
$(x + y + z)^3$	$Q = C_{3+3-1}^3 = \frac{5!}{3!2!} = \frac{120}{12} = 10$
$(x + y + z + f)^3$	$Q = C_{3+4-1}^3 = \frac{6!}{3!3!} = 20$
$(x + y + z + f + g)^3$	$Q = C_{3+5-1}^3 = \frac{7!}{3!4!} = 35$
$(x + y + z + f + g)^5$	$Q = C_{5+5-1}^5 = \frac{9!}{5!4!} = 126$

Для примера проверим результаты вычисления количества мономов полинома $(x + y + z)^3$. Прибегнем к более интересному варианту вычисления, нежели банальное раскрытие скобок, тем более что именно такой подсчет, которым мы сейчас воспользуемся, ляжет в основу подсчета мономов у полиномов более высоких степеней. Итак, если сопоставить каждому такому моному точку целочисленной решётки L , а именно моному $\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}$, то будем отображать в точку решётки L с координатами (k_1, k_2, \dots, k_m) – координатные оси соответственно x_1, x_2, \dots, x_m . Нетрудно проверить, что это отображение биективно и что в таком случае точек решетки, которые взаимно однозначно соответствуют каждому из получившихся при разложении мономов, ровно то количество, сколько и различных мономов полной степени n от q переменных, а также мономов полинома $(x_1 + x_2 + \dots + x_q)^n$ [3]. В данном случае их ровно 10. На рисунке 4 изображены точки, принадлежащие симплексу, который соответствует полиному $(x + y + z)^3$.

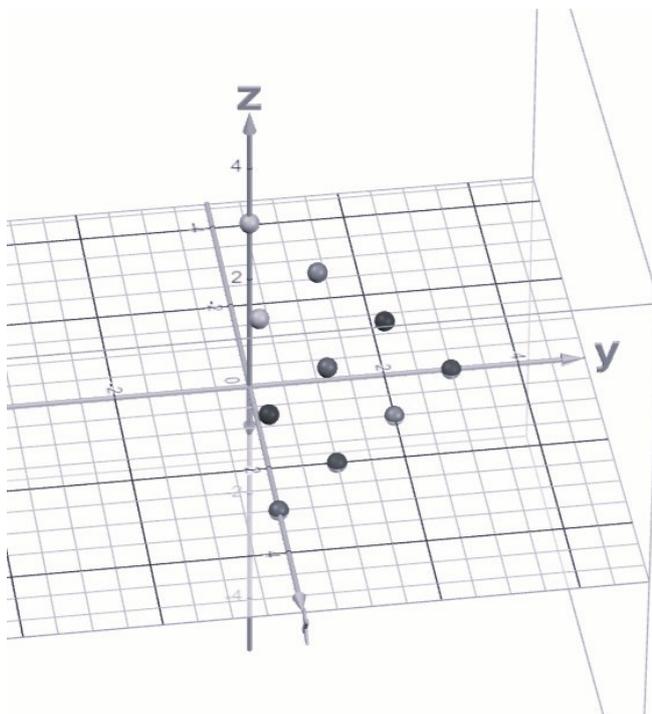


Рисунок 4 – Множество точек, принадлежащих симплексу, который соответствует полиному $(x + y + z)^3$. Авторская разработка

Установление структуры гиперпирамиды Паскаля при помощи основных понятий комбинаторики

Рассмотрим язык I над алфавитом Σ с фиксированным количеством букв m ($\Sigma = \{a, b, c, \dots, r\}$ (*), $|\Sigma| = m$), состоящий из слов фиксированной длины n : $I \subset \Sigma^*$, $I = \{w: |w| = n\}$ [7]. Нетрудно понять, что $|I| = m^n$.

Выясним, сколько существует в таком языке слов из фиксированного набора букв. Пронумеруем буквы алфавита в том порядке, в котором они записаны в (*). Заметим, что если заранее знать, какой именно набор букв дан, то можно однозначно установить, сколько слов N в таком языке можно составить из данного набора при помощи мультиномиальных коэффициентов или перестановок с повторениями:

$$N = \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m}, \quad (7)$$

где значениям k_1, k_2, \dots, k_m соответствует число вхождений соответствующей по номеру буквы в слово.

Далее разберём, сколько различных групп слов, составленных из различных наборов букв, в таком языке существует. Начнем с примера.

Выясним, сколько различных групп слов, составленных из различных наборов букв, существует в языке $I \subset \Sigma^+$, $I = \{w: |w| = 3\}$ над алфавитом $\Sigma = \{a, b, c\}$. Если составить список всех возможных наборов букв такого алфавита и написать количество слов, существующих в таком языке и составленных из данного набора букв, то можно получить следующую диаграмму (см. Рисунок 5).

Невооруженным глазом видно, что это ни что иное, как 4 уровень, считая от вершины, в пирамиде Паскаля.

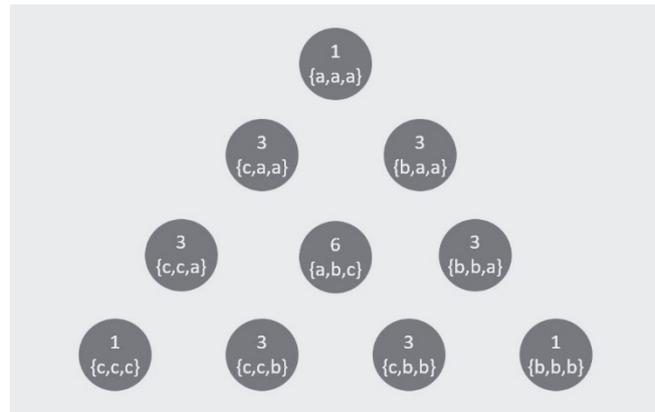


Рисунок 5 – Диаграмма языка $I \subset \Sigma^+$, $I = \{w: |w| = 3\}$, $\Sigma = \{a,b,c\}$. Авторская разработка

О структуре данной пирамиды и гиперпирамиды в целом можно добавить следующее: на гранях стоят числа сочетаний, числа внутри пирамиды образуют перестановки с повторениями, “центральные” числа (числа, стоящие в центре грани) определяются перестановками. Для каждой размерности гиперпирамиды определена своя последовательность слоёв, в которых встречаются “центральные” числа – в пирамиде Паскаля это последовательность $0, 3, 6, \dots$ – треугольные числа за исключением 0. Можно высказать гипотезу о том, что данная последовательность будет состоять из фигурных чисел известной размерности.

Таким образом, можно установить, что пирамида Паскаля является наглядным представлением взаимосвязи между основными формулами комбинаторики, в связи с чем удобно рассматривать различные количественные задачи разбиения множеств на подмножества разной характеристики, выделения множеств объектов, обладающих различными характеристиками (см. Рисунок 6 с отмеченными комбинаторными объектами и их расположением в пирамиде Паскаля в качестве примера).

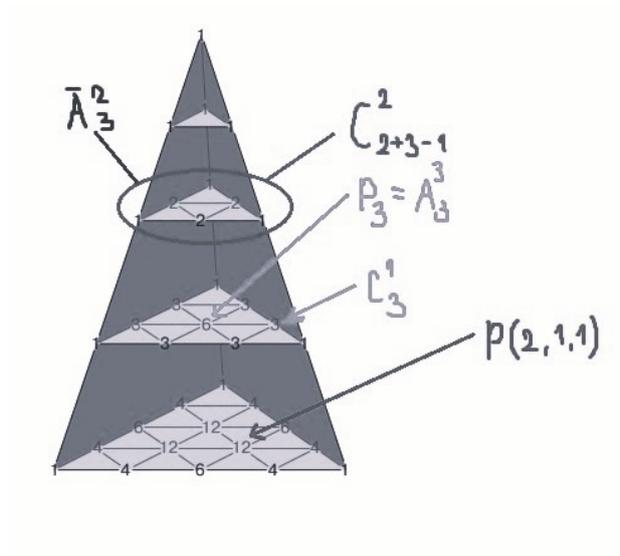


Рисунок 6 – Комбинаторная структура пирамиды Паскаля. Авторская разработка

Подсчёт различных путей на графе-решётке конечной размерности при помощи чисел гиперпирамиды Паскаля

Рассмотрим бесконечный ориентированный граф, который назовём графом-решёткой. Множество вершин графа решётки $L = \mathbb{Z}_{\geq 0}^2 \subset \mathbb{R}^2$. Из каждой вершины с координатами $(m; n)$ выходит две дуги в ближайшие вершины (“правую” и “верхнюю”): горизонтальная дуга в вершину $(m+1; n)$ и вертикальная в вершину с координатами $(m; n+1)$ (см. Рисунок 7). При этом длины всех дуг равны 1 [2].

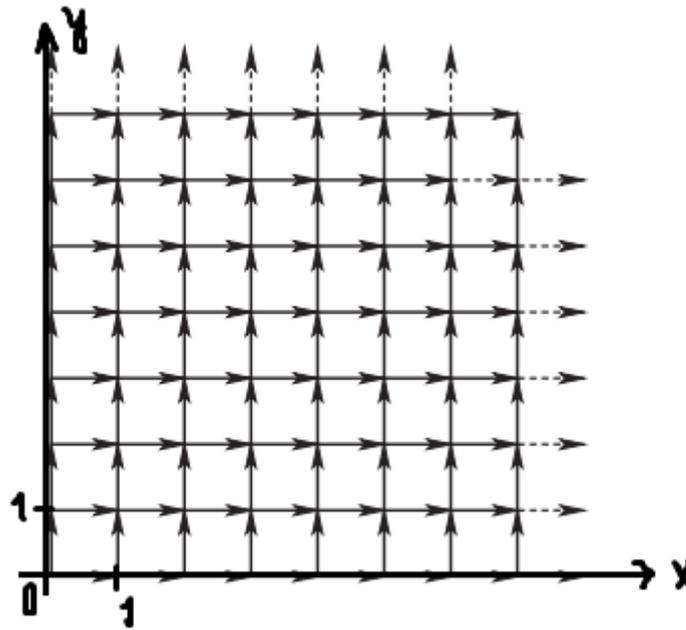


Рисунок 7 – Граф-решётка с множеством вершин решётки $L = \mathbb{Z}_{\geq 0}^2 \subset \mathbb{R}^2$.

Авторская разработка

Рассмотрим размеченный граф-решётку, каждой вершине x которого сопоставлено число $p(x)$ – число путей, ведущих из точки $(0; 0)$ в точку $x=(m; n)$.

Если кодировать подъемы по решетке как 0, а движение по решётке вправо как 1, то число путей из точки $(0; 0)$ в точку $x=(m; n)$ равно числу перестановок с повторами из m единиц и n нулей. Значит, у каждой вершины $x=(m; n)$ имеем $p(x) = p(m, n) = \frac{(m+n)!}{m!n!}$. Заметим, что таким образом можно задать треугольник Паскаля (количество путей в вершины-предки равна количеству путей в вершину-потомок).

Обобщим полученные результаты: будем рассматривать размеченный аналогичным образом $(p(x) = p(m, n, \dots, r) = \frac{(m+n+\dots+r)!}{m!n!\dots r!})$ граф-решётку $(L' = \mathbb{Z}_{\geq 0}^q \subset \mathbb{R}^q)$ с добавленными по аналогии движению «вправо» (из $(m; n; \dots; r)$ в $(m+1; n; \dots; r)$) и «вверх» (из $(m; n; \dots; r)$ в $(m; n+1; \dots; r)$) операциями по каждой из координат. Таким образом, описанный граф-решётка задаёт в пространстве гиперпирамиду Паскаля.

Итак, мы хотим найти общее количество N путей на ограниченном участке такого графа-решётки (при $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $s \leq k$, где k – фиксированное неотрицательное число, нумерация s начинается с 0 в качестве вершины). Тогда

$$N = \sum_{s=0}^k q^s \quad (8)$$

Если же мы хотим получить количество путей N_1 на таком графе считая от $O(0; 0)$ до вершин определённого «уровня» (s фиксированное), то

$$N_1 = q^s \quad (9)$$

Заключение

Найден способ подсчёта различных путей на графе-решётке конечной размерности при помощи чисел гиперпирамиды Паскаля, установлена структура гиперпирамиды Паскаля при помощи основных понятий комбинаторики, решена классическая задача о количестве мономов от q переменных полной степени n через гиперпирамиду Паскаля и теорию многогранников Эрхарта. Структура гиперпирамиды Паскаля находит своё отражение в теории вероятностей, например, в геометрической интерпретации мультиномиального распределения вероятностей.

Библиографический список

1. Бондаренко Б.А. Обобщённые треугольники и пирамиды Паскаля, их фракталы, графы и приложения. – Ташкент: Фан, 1990. – 192 с.
2. Ерусалимский Я. М. 2–3 пути на графе-решетке. Случайные блуждания // Математические заметки. – 2018. - Т. 104, в. 3. – С. 396-406

3. Кострикин А.И. Введение в алгебру: В 3-х ч. – Новое издание. – М.: МЦНМО, 2009. Ч. I: Основы алгебры. – 272 с.
4. Кузьмин О. В. Треугольник и пирамида Паскаля: свойства и обобщения // Иркутский государственный университет, Соросовский образовательный журнал. – 2000. - Т.6, №5. – С. 11-14
5. Круглов В.Е. Об n -арифметических треугольниках, построенных для полиномиальных коэффициентов // Известия вузов. Математика. – 2016. - №8. – С. 35-48
6. Мерзон Г. А. Целые точки в многоугольниках и многогранниках // Математическое просвещение. – 2020. - Сер.3, в.25. – М.: МЦНМО. – С. 110-122
7. Пентус А. Е., Пентус М. Р. Теория формальных языков: Учебное пособие. — М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом ф-те МГУ, 2004. — 80 с.

Оригинальность 79%