УДК 517.91

ИМЕНОВАННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Прозоровский А. А.

Ст. преподаватель,

Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана
Москва, Россия

Скуднева О. В.

Ст. преподаватель,

Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана
Москва, Россия

Смехнова А. А.

Ст. преподаватель,

Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана
Москва, Россия

Аннотация В статье подробно разобраны типы дифференциальных уравнений, выходящие за рамки стандартных курсов по дифференциальным уравнениям для инженерных специальностей, редко встречающиеся в методической литературе. Приведены обоснования применения методов решения. Представлены краткие исторические сведения. Материалы могут быть интересны студентам, увлекающимся математикой и участвующим в олимпиадах.
Ключевые слова: Дифференциальное уравнение, уравнение Абеля, уравнение Риккати, методы решения ДУ, уравнения Лагранжа и Клеро.

NAMED DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE FIRST ORDER AND METHODS OF THEIR SOLUTION

Prozorovsky A. A.,
Senjor lecturer
Bauman Moscow State Technical University
Moscow, Russia

Skudneva O. V
Senjor lecturer
Bauman Moscow State Technical University
Moscow, Russia

Smekhnova A.A.
Senjor lecturer
Bauman Moscow State Technical University
University,
Moscow, Russia

Abstract The article examines in detail the types of differential equations that go beyond the standard courses on differential equations for engineering specialties, which are rarely found in the methodological literature. The substantiation of the application of the solution methods is given. Brief historical information is provided. The materials may be of interest to students who are interested in mathematics and participate in Olympiads.
Keywords: Differential equation, Abel equation, Riccati equation, methods for solving DU, Lagrange and Clerault equations.

Дифференциальное уравнение – математическое выражение физических процессов – одно из центральных понятий высшей математики. Ни одно серьёзное инженерное исследование не обходится без составления дифференциальных уравнений и поиска их оптимальных решений. Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) — это один из основных инструментов, используемых в науке и инженерии для описания различных процессов и явлений.

Сам термин «дифференциальное уравнение» был введен в XVII веке. В этот период наука и математика начали развиваться быстрыми темпами. Великие ученые, такие как Исаак Ньютон и Готфрид Лейбниц, внесли огромный вклад в развитие теории дифференциальных уравнений. Они разработали методы решения уравнений, которые позволили решать сложные проблемы в физике, механике, астрономии и других областях знания. Сегодня ОДУ являются неотъемлемой частью многих научных дисциплин и применяются во многих областях, включая физику, химию, биологию, экономику, социологию и др. Постоянное развитие и совершенствование методов решения ОДУ продолжается, и они остаются одним из важных инструментов, используемых учеными в исследованиях и разработках. Некоторые дифференциальные уравнения получили имена исследовавших их ученых. Это уравнения Бернулли, Риккати, Эйлера, Лагранжа, Клеро, Абеля.

Уравнение Риккати. Уравнение вида $y' + a(x)y^2 + b(x)y = c(x)$ называется общим уравнением Риккати. В целом ряде случаев решение этого уравнения не сводится к квадратурам и не может быть выражено в конечном виде через элементарные функции. Рассмотрим отдельные частные случаи общего уравнения Риккати, когда удаётся выразить его решение через элементарные функции:

а) если известно одно из решений уравнения $y_1(x)$, то применяется замена $y(x) = y_1(x) + z(x)$, преобразующая уравнение Риккати в уравнение Бернулли с новой неизвестной функцией $z(x)$. Частное решение $y_1(x)$ можно подобрать исходя из вида свободного члена $c(x)$.

Пример. Решим дифференциальное уравнение: $x^2y' + xy + x^2y^2 = 4$.

Приведём уравнение к стандартному виду: $y' + \frac{y}{x} + y^2 = \frac{4}{x^2}$, $\quad c(x) = \frac{4}{x^2}$. Попробуем искать частное решение в виде $y_1(x) = \frac{a}{x}$, $\; y_1'(x) = -\frac{a}{x^2}$, где a – неопределённый коэффициент. После подстановки в ДУ получим: $\frac{-a}{x^2} + \frac{a}{x^2} + \frac{a^2}{x^2} = \frac{4}{x^2}$, отсюда $a = \pm 2$. Выберем один из двух результатов: пусть $y_1(x) = \frac{2}{x}$. Тогда примем

$$y(x) = \frac{2}{x} + z(x), \quad y'(x) = -\frac{2}{x^2} + z'(x)$$

ДУ сводится к уравнению Бернулли: $-\frac{2}{x^2}+z'(x)+\frac{2}{x^2}+\frac{z(x)}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{4z(x)}{x}+z^2(x)=\frac{4}{x^2}$

$z'+\frac{5z}{x}+z^2=0$. Решаем его с помощью подстановки Бернулли, получаем: $z(x)=\frac{4}{4Cx^6-x}$, окончательный ответ: $y=\frac{2}{x}+\frac{4}{4Cx^6-x}$.

б) если известны два решения уравнения, то его общий интеграл находится одной квадратурой. Покажем это на общем примере. Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ - частные решения уравнения Риккати, тогда: $\frac{dy_1}{dx}=-a(x)y_1^2-b(x)y_1+c(x)$, $\frac{dy_2}{dx}=-a(x)y_2^2-b(x)y_2+c(x)$. С помощью вычитания полученных выражений из уравнения Риккати последовательно избавимся от свободного члена $c(x)$ и коэффициента $b(x)$. Вычтем первое уравнение из общего уравнения Риккати: $\frac{d(y-y_1)}{dx}=-a(x)(y^2-y_1^2)-b(x)(y-y_1)$. После деления на $(y-y_1)$ получаем: $\frac{1}{y-y_1}\cdot\frac{d(y-y_1)}{dx}=-a(x)(y+y_1)-b(x)$, $\frac{d}{dx}\left[\ln|y-y_1|\right]=-a(x)(y+y_1)-b(x)$.

Аналогично для второго уравнения: $\frac{d}{dx}\left[\ln|y-y_2|\right]=-a(x)(y+y_2)-b(x)$.

Вычитаем второе равенство из первого: $\frac{d}{dx}\left[\ln\left|\frac{y-y_1}{y-y_2}\right|\right]=a(x)(y_2-y_1)$.

Откуда получаем общий интеграл уравнения Риккати: $\frac{y(x)-y_1(x)}{y(x)-y_2(x)}=C\cdot\exp\int a(x)[y_2(x)-y_1(x)]dx$.

в) нелинейное уравнение Риккати $a(x)y'+a(x)y^2+b(x)y+c(x)=0$ (с двумя одинаковыми коэффициентами) можно привести к линейному уравнению второго порядка $a(x)u''+b(x)u'+c(x)u=0$ с помощью подстановки $u'=u\cdot y$, которая удаляет из уравнения слагаемое в квадрате, но повышает порядок уравнения.

Пример. Решим дифференциальное уравнение: $x^2y'+x^2y^2+xy+1=0$.

Используем замену $u' = uy \Rightarrow y = \frac{u'}{u} \Rightarrow y' = \frac{u''u - u'u'}{u^2}$, $x^2 \frac{u''u - (u')^2}{u^2} + \frac{x^2}{u^2}(u')^2 + \frac{x}{u}u' + 1 = 0$

$\Rightarrow \frac{x^2}{u^2}u''u + \frac{x}{u}u' + 1 = 0 \Rightarrow x^2u'' + xu' + u = 0$ – получили однородное уравнение Эйлера. Для нахождения функции *u(x)* применим стандартную для уравнения Эйлера замену: $u = x^{\mu}$. Тогда: $\mu(\mu-1)x^{\mu-2}x^2 + \mu x^{\mu-1}x + x^{\mu} = 0 \,|: x^{\mu} \neq 0$

Составим и решим характеристическое уравнение: $\mu(\mu-1) + \mu + 1 = 0$,

$\mu^2 - \mu + \mu + 1 = 0 \Rightarrow \mu_{1,2} = \pm i \quad \Rightarrow \quad u_1 = \cos(\ln x)$, $u_2 = \sin(\ln x)$, $u_1' = -\sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x}$

$u_2' = \cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}$. Сделаем обратную замену: $y_1 = \frac{u_1'}{u_1} = \frac{-\sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x}}{\cos(\ln x)} = -\frac{1}{x}\operatorname{tg}(\ln x)$

$$y_2 = \frac{u_2'}{u_2} = \frac{\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}}{\sin(\ln x)} = \frac{1}{x}\operatorname{ctg}(\ln x)$$

Для нахождения общего решения дифференциального уравнения используем выведенную в пункте б) формулу:

$$\frac{y + \frac{1}{x}\operatorname{tg}(\ln x)}{y - \frac{1}{x}\operatorname{ctg}(\ln x)} = C\cdot exp\int\left[\frac{1}{x}\operatorname{ctg}(\ln x) + \frac{1}{x}\operatorname{tg}(\ln x)\right]dx = C\cdot exp\left(\int \operatorname{ctg}(\ln x)d\ln x + \int \operatorname{tg}(\ln x)d\ln x\right)dx =$$

$$= C\cdot\exp(\ln(\sin(\ln x)) - \ln(\cos(\ln x))) = C\cdot\frac{\sin(\ln x)}{\cos(\ln x)} = C\cdot\operatorname{tg}(\ln x)$$

$$y + \frac{1}{x}\operatorname{tg}(\ln x) = C\left(y\cdot\operatorname{tg}(\ln x) - \frac{1}{x}\right) = Cy\cdot\operatorname{tg}(\ln x) - \frac{C}{x}$$

$$y(1 - C\cdot\operatorname{tg}(\ln x)) = -\frac{C}{x} - \frac{1}{x}\operatorname{tg}(\ln x) \Rightarrow y = -\frac{C + \operatorname{tg}(\ln x)}{x(1 - C\cdot\operatorname{tg}(\ln x))}.$$

г) если $a(x) = 0$, $b(x) \neq 0$, $c(x) \neq 0$, то имеем неоднородное линейное ДУ первого порядка, способы решения которого хорошо известны.

д) если $b(x) = 0$, $a(x) \neq 0$, $c(x) = bx^{\alpha}$, где b, α – не зависят от x, то имеем специальное уравнение Риккати: $y' + ay^2 = bx^{\alpha}$. Для его решения применяется замена, повышающая порядок уравнения: $u'(x) = y(x)u(x)$.

Пример. Найдём частное решение специального уравнения Риккати $y' + 2y^2 = -\frac{1}{8}x^{-2}$

Решение: проведём техническую замену: $z(x) = 2y$. Получим: $\frac{z'}{2} + 2\frac{z^2}{4} = -\frac{1}{8}x^{-2}$,

$z' + z^2 = -\frac{1}{4}x^{-2}$. Далее используем повышающую замену:

$u' = z \cdot u \Rightarrow z = \frac{u'}{u} \Rightarrow z' = \frac{u''u - (u')^2}{u^2}$

При подстановке в ДУ: $\frac{u''u - (u')^2}{u^2} + \left(\frac{u'}{u}\right)^2 = -\frac{1}{4}x^{-2}$ получили однородное уравнение Эйлера: $u'' + \frac{1}{4}\frac{1}{x^2}u = 0$.

Для нахождения функции *u(x)* применим стандартную для уравнения Эйлера замену: $u = x^{\mu}$. Характеристическое уравнение: $\left(\mu - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow \mu_{1,2} = \frac{1}{2} \Rightarrow u_1 = \sqrt{x}$, $u_2 = \sqrt{x}\ln x$. Возвращаемся к переменной *z*: $z_1 = \frac{1}{2x}$, $z_2 = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\ln x}\right)$, а после этого к переменной *y*: $y_1 = \frac{1}{4x}$, $y_2 = \frac{1}{2x}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\ln x}\right)$.

Далее для нахождения общего решения можно применить либо формулу из пункта б) для двух решений, либо замену из пункта а) для одного из двух решений. Данный пример (как и предыдущий) демонстрирует регулярную методику поиска частного решения уравнения Риккати, если не получается угадать его.

Ответ: $y_1 = \frac{1}{4x}$, $y_2 = \frac{1}{2x}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\ln x}\right)$.

г) если $b(x) \neq 0$, $a(x) \neq 0$, $c(x) = 0$, то имеем уравнение Бернулли: $y' + b(x)y = -a(x)y^2$.

Способы его решения хорошо известны:

– замена $y(x) = u(x)v(x)$ приводит его к двум уравнениям с разделяющимися переменными (подстановка Бернулли),

– замена $y=\frac{1}{z(x)}$ приводит его к неоднородному линейному ДУ первого порядка.

д) если коэффициенты дают полный квадрат, как в следующем примере: $y'-2xy-y^2=x^2 \Rightarrow y'=(y+x)^2$, то, полагая $u(x)=y+x$, получаем уравнение с разделяющимися переменными: $u'=u^2+1 \Rightarrow \frac{du}{u^2+1}=dx$

$\operatorname{arctg} u = x+C \Rightarrow u=\operatorname{tg}(x+C)$ или: $y(x)=\operatorname{tg}(x+C)-x$.

з)если $b(x)=-kx$, $a(x)=k$, $c(x)=1$, то имеем уравнение Риккати с константой в правой части: $y'-kxy+ky^2=1 \Rightarrow \ y'+ky(y-x)=1$.

Полагая $u(x)=y-x$, получаем уравнение Бернулли: $u'+k\left(xu+u^2\right)=0$

Способы решения уравнения Бернулли хорошо известны.

Уравнение Абеля. Уравнение вида $y'=a(x)y^3+b(x)y^2+c(x)y+f(x)$ называется уравнением Абеля первого рода. В целом ряде случаев решение этого уравнения не сводится к квадратурам и не может быть выражено в конечном виде через элементарные функции. С помощью подстановки:

$$y(x)=\omega(x)\eta(\xi)-\frac{b(x)}{3a(x)}\text{ , где }\xi=\int a(x)\omega^2dx\text{ , }\omega(x)=\exp\int\left(c(x)-\frac{b^2(x)}{3a(x)}\right)dx$$

уравнение Абеля приводится к нормальному виду: $\eta'=\eta^3+I(x)$, где

$$a(x)\omega^3 I=f(x)+\frac{d}{dx}\left(\frac{b(x)}{3a(x)}\right)-\frac{b(x)c(x)}{3a(x)}+\frac{2b^3(x)}{27a(x)}.$$

Рассмотрим решение отдельных частных случаев решения уравнения Абеля:

а) если $a(x)=0,\ b(x)\neq 0,\ c(x)\neq 0,\ f(x)\neq 0,$ то имеем уравнение Риккати;

б) если $a(x)=0,$ и $f(x)=0,$ то имеем уравнение Бернулли;

в) если $a(x)\neq 0,\ b(x)=0,\ c(x)\neq 0,\ f(x)=0,$ то имеем уравнение Бернулли.

г) уравнение вида $y'+y^3+kxy^2=0,$ где $k\in R$, с помощью замены $u(x)=\frac{1}{y}-\frac{1}{2}kx^2$ преобразуется к специальному уравнению Риккати $\frac{dx}{du}=\frac{1}{2}kx^2+u$, в котором произошла инверсия функции и аргумента. Рекомендуется проделать преобразования и инверсию самостоятельно.

д) $y'-x^{\alpha}y^3+3y^2-x^{-\alpha}y-x^{-2\alpha}+\alpha x^{-\alpha-1}=0$. Подбором можно установить, что $y=x^{-\alpha}$ является одним из решений уравнения Абеля. Применяя замену $y=x^{-\alpha}+u(x)$, где $u(x)$ - новая искомая функция, получаем уравнение Бернулли:

$u'+2x^{-\alpha}u-x^{\alpha}u^3=0$.

е) $x^2y'+ky^3-kx^2y^2=0$. Данное уравнение Абеля, с помощью замены $u(x)=\frac{1}{y}+kx$ с последующей инверсией функции и аргумента, приводится к уравнению Абеля из пункта г): $\frac{dx}{du}+x^3-\frac{1}{k}ux^2=0$.

ж) $x^7y'+2\left(x^2+1\right)y^3+5x^3y^2=0$. Данное уравнение Абеля с помощью замены $y=\frac{1}{u}$ приводится к виду: $x^7uu'=5x^3u+2\left(x^2+1\right)$. Далее с помощью подстановки $x\cdot v(x)=x^3u+1$ и последующей инверсии функции и аргумента получаем линейное неоднородное уравнение первого порядка: $\frac{dx}{dv}-\frac{xv}{2\left(v^2+1\right)}+\frac{1}{2\left(v^2+1\right)}=0$.

Уравнение Лагранжа. Уравнение вида $y=x\varphi(y')+\psi(y'),$ где $\varphi(y'),\psi(y')$ – известные функции, дифференцируемые на некотором интервале, называется уравнением Лагранжа. Чтобы решить уравнение Лагранжа, необходимо, согласно общей методике параметризации производной, использовать подстановку $y' = p$, затем получить уравнение $y = x\varphi(p) + \psi(p)$.

Продифференцируем ДУ по переменной x: $dy = pdx = \varphi(p)dx + x\varphi'_p dp + \psi'_p dp,$ сгруппируем переменные: $(p - \varphi(p))dx = (x\varphi'_p + \psi'_p)dp.$ Если $p - \varphi(p) = 0,$ уравнение Лагранжа имеет особое решение, которое определяется функцией $y = x\varphi(C) + \psi(C),$ где C − корень уравнения $p - \varphi(p) = 0.$

Пример. Найдём общее решение дифференциального уравнения Лагранжа $y = 2xy' - 3(y')^2$. Сделаем замену переменных $y' = p,$ получим уравнение: $y = 2xp - 3p^2.$
Продифференцируем по переменной x: $dy = pdx = 2xdp + 2pdx - 6pdp.$
Приведем подобные и сгруппируем: $-pdx = (2x - 6p)dp.$ Получили неоднородное линейное дифференциальное уравнение относительно функции $x(p)$: $\frac{dx}{dp} = -\frac{2}{p}x + 6.$

Находим общее решение неоднородного уравнения: $x_{о.н.} = \frac{C}{p^2} + 2p$.

Подставляем полученное выражение для x в выражение для y и получаем общий интеграл ДУ:
$$\begin{cases} y = \left(\frac{C}{p^2} + 2p\right)2p - 3p^2 \\ x = \frac{C}{p^2} + 2p \end{cases}$$

Уравнение Клеро. Уравнение первого порядка вида $y = xy' + \psi(y'),$ где $\psi(y')$ - некоторая нелинейная дифференцируемая функция, называется уравнением Клеро. Чтобы решить уравнение Клеро, необходимо использовать подстановку $y' = p$, получим уравнение $y = xp + \psi(p)$. Продифференцируем по переменной x: $dy = pdx = pdx + xdp + \psi'_p dp.$ Сократив левую и правую части на pdx, получим уравнение: $xdp + \psi'_p dp = 0.$

Уравнение Клеро может иметь особое решение, которое выражается в параметрической форме, где p -параметр.

Пример . Найдём общее и особое решения уравнения Клеро $y = xy' + (y')^2$.

Сделаем замену переменных $y' = p$, получим уравнение: $y = xp + p^2$.

Продифференцируем по переменной x: $dy = pdx = xdp + pdx + 2pdp.$

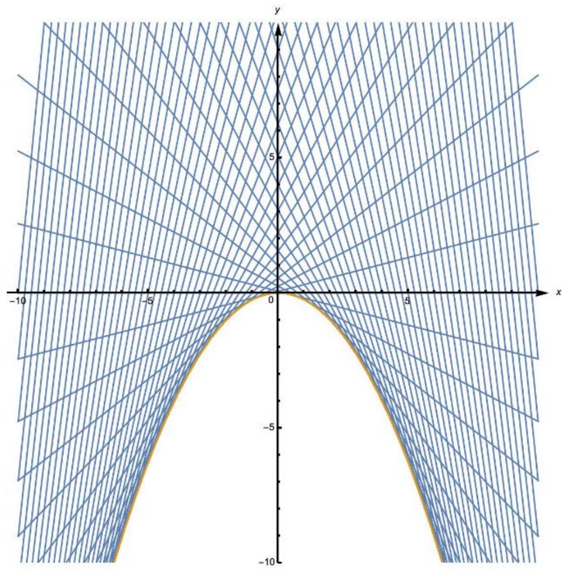

Рисунок 1 Семейство интегральных кривых уравнения Клеро с огибающим особым решением

Сократим правую и левую части на pdx:

$xdp + 2pdp = 0$ и сгруппируем:

$(x + 2p)dp = 0$.

Рассмотрим первый случай, когда $dp = 0$, отсюда $p = C$. Подставляя $p = C$ в параметризованное уравнение, находим общее решение заданного уравнения Клеро: $y = Cx + C^2$. Во втором случае $x + 2p = 0$, или $x = -2p$. Данное решение соответствует особому решению, которое представляется в виде системы: $\begin{cases} y = px + p^2 \\ x = -2p \end{cases}$.

Исключим параметр p из системы: $p = -\frac{x}{2}$, $y = -\frac{x^2}{2} + \left(-\frac{x}{2}\right)^2$, $y = -\frac{x^2}{4}$.

Данная интегральная кривая с геометрической точки зрения, является огибающей семейства прямых, определяемых общим решением (см. Рисунок 1).

Пример. Найти общее и особое решения уравнения Клеро $y = xy' + \sqrt{(y')^2 + 1}$.

Сделаем замену переменных $y' = p,$ получим уравнение: $y = xp + \sqrt{p^2 + 1}$.

Продифференцируем по переменной x: $dy = xdp + pdx + \dfrac{pdp}{\sqrt{p^2 + 1}} = pdx$.

Сократим правую и левую части на pdx: $xdp+\frac{pdp}{\sqrt{p^2+1}}=0$, сгруппируем: $\left(x+\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}\right)dp=0$. Рассмотрим первый случай, когда $dp=0$, отсюда $p=C$.

Подставляя $p=C$ в параметризованное уравнение, находим общее решение заданного уравнения Клеро: $y=xC+\sqrt{C^2+1}$.Во втором случае: $x=-\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}$, $y=xp+\sqrt{p^2+1}\Rightarrow y=-\frac{p^2}{\sqrt{p^2+1}}+\sqrt{p^2+1}=\frac{-p^2+p^2+1}{\sqrt{p^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$.

Данное решение соответствует особому решению, которое представляется в виде системы: $\begin{cases} y=\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} \\ x=-\frac{p}{\sqrt{p^2+1}} \end{cases}$.

Исключим параметр p из системы, для этого возведем переменные в квадрат и просуммируем: $x^2+y^2=\frac{p^2}{p^2+1}+\frac{1}{p^2+1}=1\Rightarrow x^2+y^2=1$.

Данная интегральная кривая с геометрической точки зрения, является огибающей семейства прямых, определяемых общим решением (см. Рисунок 2).

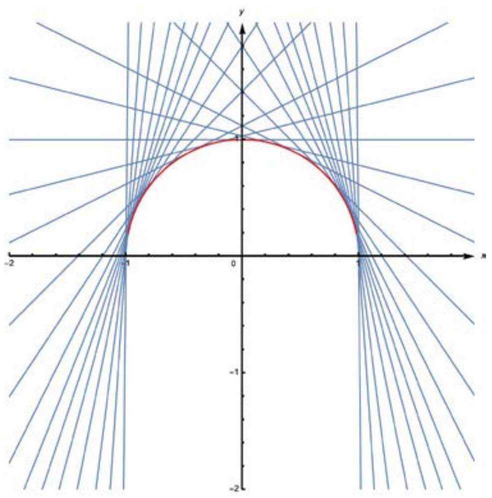

Рис. 2 – Семейство интегральных кривых уравнения Клеро с огибающим особым решением

Ответ: общее решение $y=xC+\sqrt{C^2+1}$, особое решение $x^2+y^2=1$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- изложены методики решения нелинейных ДУ первого порядка Риккати и Абеля,

- изучены методики решения ДУ первого порядка, не разрешённых по производной, в частности уравнения Лагранжа и Клеро,

Библиографический список

1. Агафонов С.А. Дифференциальные уравнения : учеб. для вузов / С.А. Агафонов, А.Д. Герман, Т.В. Муратова. – Изд. 5-е стер. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. – 347, [5] с. : ил. – (Математика в техническом университете; вып. VIII)
2. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Новое издание, исправл. – М.: МЦНМО, 2012. – 344 с.: ил.
3. Ефимов А.В., Демидович Б.П. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Ч. 2. Специальные разделы математического анализа. - М.: ООО "Издательский дом Альянс", 2010. - 368 с. - ISBN: 978-5-903034-90-1, 6-е издание, стереотипное. Перепечатка третьего издания 1995 г.
4. Титов К.В., Прозоровский А.А. Компьютерный практикум по численным методам решения обыкновенных дифференциальных уравнений: методические указания к выполнению лабораторных работ по дисциплине "Практикум по применению математических пакетов" [Электронное учебное издание]. - М.: 2014г. МГТУ им. Н.Э. Баумана, номер государственной регистрации 0321402610
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Изд.4-е, М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011, - 240 стр.
6. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. - М. «Наука»; 2008.
7. Эрих Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М., 1971 г., 576 стр. с илл.

Оригинальность 76%