УДК 519.863

ПОДХОДЫ К ПОИСКУ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧЕ МАКСИМИЗАЦИИ ВЫРУЧКИ И ПРИБЫЛИ

Киселев В.В.

к.т.н., доцент,

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана,

Москва, Россия

Аннотация

В статье предлагаются подходы к созданию человеко-машинных процедур в задаче максимизации прибыли и выручки на выпуклом множестве. Для получения Парето-оптимальных решений используются методы линейной свертки и свертки Гермейера, а метод возможных направлений - для получения Λ-оптимальных решений.

Ключевые слова: многокритериальная оптимизация, принятие решений, математическое программирование, человеко-машинные процедуры.

APPROACHES TO FINDING OPTIMAL SOLUTIONS TO THE PROBLEM OF MAXIMIZING REVENUE AND PROFIT

Kiselev V. V.

Ph. D., associate Professor, Bauman

Moscow State Technical University,

Moscow, Russia

Annotation

The article proposes approaches to creating human-machine procedures in the problem of maximizing profit and revenue on a convex set. To obtain Pareto-optimal solutions, the linear convolution and Germeier convolution methods are used, and the feasible directions method is used to obtain Λ-optimal solutions.

Keywords: multi-criteria optimization, decision-making, mathematical programming, human-machine procedures.

В настоящее время в технике и экономике выбор оптимального варианта сложной системы осуществляется на основании использования математической модели системы с несколькими целевыми функциями [2,4,6]. Универсального метода решения таких задач не существует. Выбор метода зависит от вида и свойств используемой модели. Наиболее удачным подходом является создание человеко-машинной процедуры для решения конкретной многокритериальной задачи, в процессе которой можно учитывать опыт и интуицию лица принимающего решение (ЛПР), а также память и быстродействие компьютера для выполнения рутинных вычислительных операций. В статье предлагаются три метода создания человеко-машинных процедур для решения задачи максимизации прибыли и выручки.

Будем рассматривать следующую задачу. Для выпуска n видов продукции используются m видов ресурсов. Задана матрица норм расходов сырья A, цены на ресурсы $Q^T \in R^m$, цены реализации продукции $P \in R^n$, запасы ресурсов $B \in R^m$. Пусть $x \in R^n$ -план производства, тогда математическая модель задачи имеет вид

$$\begin{cases} u_1 = (P, x) \to \max, \\ u_2 = (P, x) - ((QA)^T, x) \to \max, \\ Ax \le B, \\ A \ge 0, B \ge 0, x \ge 0. \end{cases}$$

В данной задаче множество допустимых значений

$X = \{x \mid Ax \le B, x \ge 0\}$

является выпуклым многогранником. Множество $U = u(x)$ есть образ X при линейном отображении – тоже выпуклый многогранник. Далее предлагаются три сценария человеко-машинных процедур, в процессе которых ЛПР задает желаемые варианты в пространстве критериев, компьютер вычисляет ближайший в определенном смысле Парето-оптимальный вариант [7]. ЛПР исследует полученный вариант и если он его не удовлетворяет, то задает новый. Предполагается, что множество X ограничено и выполнена аксиома различимости, это означает, что ЛПР может различать варианты, если расстояние между ними превосходит некоторую фиксированную величину. Нетрудно видеть, что процедура поиска решения в этом случае сходится за конечное число шагов.

Первый сценарий основан на использовании линейной свертки, здесь используется тот факт, что для выпуклого множества U любой Парето-оптимальный вариант может получен с помощью линейной свертки.

Первый сценарий:

Шаг 0. i=1.

Шаг 1. ЛПР задает желаемый вариант $u^{i*} \in R^2$ в пространстве критериев. Координаты данного вектора являются весами линейной свертки

$$z = \sum_j u_j^{i*} u_j(x).$$

Шаг 2. Компьютер решает задачу максимизации линейной свертки как соответствующую задачу линейного программирования и выдает ЛПР результаты вычислений в виде векторов u^i и x^i.

Шаг 3. ЛПР анализирует полученный вариант, если вариант удовлетворяет ЛПР, то процедура останавливается, если нет, то i=i+1 и возвращение к шагу 1.

Достоинством первого метода является его простота. Недостатком – то, что полученный вариант может находиться слишком далеко от желаемого.

Следующий сценарий использует свертку Гермейера [7], позволяет получить любую Парето-оптимальную точку. Этот сценарий использует более сложные вычисления, но полученные варианты могут находиться ближе к желаемому.

Второй сценарий:

Шаг 0. i=1.

Шаг 1. ЛПР задает желаемый вариант $u^{i*} \in R^2$ в пространстве критериев.

Шаг 2. Вычисляются координаты вектора $\gamma_j^i = 1/u_j^{i*}, j = \overline{1,2}$, компьютер решает задачу максимизации свертки Гермейера $\max_{x \in X} \min_j \{\gamma_j^i u_j(x)\}$. Данная задача к задаче линейного программирования

$$\begin{cases} t \to \max, \\ \gamma_j u_j(x) \geq t, j = \overline{1,2}, \\ x \in X. \end{cases}$$

Шаг 3. ЛПР анализирует полученный вариант, если вариант удовлетворяет ЛПР, то процедура останавливается, если нет, то i=i+1 и возвращение к шагу 1.

Определение 1. [5] Вариант $x_\Lambda \in X$ называется Λ-оптимальным, если для всякого $x \in X$ такого что $u(x) - u(x_\Lambda) \in \Lambda$ следует $u(x) = u(x_\Lambda)$.

Определение 2. [9] Конус Λ называется многогранным конусом, если его можно представить в виде

$$\Lambda = \{z \,|\, z = \sum_{i=1}^{L} \alpha_i H_i, \alpha \geq 0, H_i \in R^n, i = \overline{1,L}\}.$$

Векторы $H_{i,}\ i = \overline{1,L}$ называются генератором конуса.

Можно заметить, что векторы $H_1 = P$ и $H_2 = P - (QA)^T$ являются генераторами конуса Λ в пространстве R^n. Любой Λ-оптимальной точке в R^n соответствует Парето-оптимальная точка (ее образ) в пространстве критериев. Кроме того, по построению, генераторы конуса являются градиентами целевых функций.

Третий сценарий:

Шаг 0. i=1.

Шаг 1. ЛПР задает желаемый вариант $u^{i*} \in R^2$ в пространстве критериев.

Шаг 2. Компьютер вычисляет значение вектора u^i вычисляет по методу возможных направлений двигаясь к желаемому варианту так.

Внутри области допустимых значений осуществляется движение из начала координат по направлению

$$S^0 = u_1^{i*} H_1 + u_2^{i*} H_2$$

до достижения границы области X. Далее в граничной точке x выбирается подходящее направление S с учетом активных ограничений [1,3,8] и условия $S \in x + \Lambda$. Осуществляется переход в новую граничную точку x. Процедура выбора подходящего направления и перехода в новую точку повторяется до достижения заданной точности. Полученная точка является Λ-оптимальной в R^n, а ее образ – Парето-оптимальной точкой в пространстве критериев.

Шаг 3. ЛПР анализирует полученный вариант, если вариант удовлетворяет ЛПР, то процедура останавливается, если нет, то i=i+1 и возвращение к шагу 1.

Выбор сценария и дальнейшая разработка метода вычислений зависят от размерности задачи и структуры множества X. Для простых задач можно использовать первый сценарий, для более сложных – второй и третий сценарии.

Библиографический список:

1. Зойтендейк Г. Методы возможных направлений. - М.: Издательство иностранной литературы, 1963.

2. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. - М.: АЙРИСПРЕСС, 2002.

3. Карманов В.Г. Математическое программирование.- М.: Физматлит, 2008.

4. Киселев В.В., Гончаренко В.М. Математическое моделирование социально-экономических процессов.- М.: КНОРУС, 2021.

5. Kiselev V.V Application of the Λ-Monotonicity to the Search for Optimal Solutions in Higher-Dimensional Problems // JOURNAL OF MASHEMATICAL SCIENCE. - 2016- Volume 216. - Number 5. –pp. 667-673. (2016).

6. Математические методы в экономике и финансах/ под ред. В.М. Гончаренко и В.Ю. Попова. - М.: КНОРУС, 2016. С. 244-266.

7. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. - М.: Физматлит, 2007.

8. Фиакко А., Мак-Кормик Г. Нелинейное программирование. - М.: МИР, 1972.

9. Yu, P.L. Cone. Cone convexity, cone extreme points, and nondominated solutions in decision problems with multiobjectives // Optim. Theory Appl. − 1974. − V. 14. − № 3.

Оригинальность 81%