УДК: 514.16

РАССЛОЕНИЯ, ПОРОЖДЕННЫЕ АЛГЕБРОЙ ТРЕТЬЕГО ТИПА ПО КЛАССИФИКАЦИИ ШТУДИ

Тришин В. Н.

к. ф.-м.н., доцент,

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,

Москва, Россия

Тришина Н. Е.

к. ф.-м.н., доцент,

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,

Российский химико-технологический университет им. Д. И. Менделеева,

Москва, Россия

Аннотация.

В статье рассматриваются расслоения, которые определяются неприводимой ассоциативной алгеброй типа III. Расслоения получаются при разбиении группы Ли обратимых элементов алгебры на левые смежные классы по ее подгруппам. С помощью этого метода найдены три тривиальных расслоения.

Ключевые слова: ассоциативная унитальная алгебра, главное расслоение, факторгруппа.

BUNDLES GENERATED BY ALGEBRAS OF THE THIRD TYPE ACCORDING TO THE CLASSIFICATION OF STUDY

Trishin V. N.

PhD, Associate Professor,

Bauman Moscow State Technical University,

Moscow, Russia

Trishina N. E.

PhD, Associate Professor,

Bauman Moscow State Technical University,

Mendeleev University of Chemical Technology of Russia,

Moscow, Russia

Abstract.

The article considers bundles that are defined by an irreducible associative algebra of type III. The bundles are obtained by partitioning the Lie group of invertible elements of the algebra into left cosets of its subgroups. Three trivial bundles are found using this method.

Key words: associative unital algebra, principal bundle, quotient group.

Пусть $\mathfrak{A}$ — ассоциативная унитальная алгебра размерности n, $\widetilde{\mathfrak{A}}$ — множество ее обратимых элементов. Это открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ и операции умножения и взятия обратного элемента являются гладкими функциями. Поэтому $\widetilde{\mathfrak{A}}$ — группа Ли по умножению.

Пусть $\mathfrak{B}$ — унитальная подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$, $\widetilde{\mathfrak{B}}$ — множество обратимых элементов $\mathfrak{B}$. $\widetilde{\mathfrak{B}}$ — подгруппа группы $\widetilde{\mathfrak{A}}$ по умножению и замкнутое подмножество, поэтому $\widetilde{\mathfrak{B}}$ — подгруппа Ли.

Рассмотрим фактормножество $\widetilde{\mathfrak{A}}/\widetilde{\mathfrak{B}}$ правых смежных классов. Тогда расслоение $(\widetilde{\mathfrak{A}}, \pi, \widetilde{\mathfrak{A}}/\widetilde{\mathbb{B}})$, где π — каноническая проекция, есть главное расслоение со структурной группой $\widetilde{\mathfrak{B}}$ [15]. Доказано, что в случае, когда $\mathfrak{A}$ есть алгебра кватернионов, это главное расслоение изоморфно расслоению Хопфа [4],

[5].

Исходя из такого подхода нами рассмотрены все алгебры размерностей 3 и 4 и получены расслоения этих алгебр над фактормножествами $\widetilde{\mathfrak{A}}/\widetilde{\mathfrak{B}}$ смежных классов. Большинство получающихся расслоений тривиально. Показано, что только в 12 случаях для алгебр размерности 4 и в одном случае для алгебр размерности 3 расслоения локально тривиальны, но не тривиальны. Приведем подробное описание расслоений для неприводиой алгебры типа III по классификации Штуди.

Пусть $\mathfrak{A}$ алгебра с таблицей умножения

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_3	e_3	0
e_2	e_2	$-e_3$	λe_3	0
e_3	e_3	0	0	0

Лемма 1 *Если* $\lambda > 0$*, то алгебра* $\mathfrak{A}$ *содержит единственную 2-подалгебру* $\{e_0, e_3\}$*, изоморфную алгебре* $\mathbb{R}(\varepsilon)$ *дуальных чисел. Если* $\lambda \leq 0$*, то алгебра* $\mathfrak{A}$ *содержит два пучка 2-подалгебр* $\{e_0, a(\pm\sqrt{-\lambda}e_1 + e_2) + be_3\}$*. Алгебра* $\mathfrak{A}$ *имеет пучок 3-подалгебр* $\{e_0, ae_1 + be_2, e_3\}$*, изоморфных алгебре* $\mathbb{R}(\varepsilon^2)$ *плюральных чисел. Если* $\lambda \leq 0$*, то алгебра* $\mathfrak{A}$*, кроме того, содержит подалгебру* $\{e_0, \sqrt{-\lambda}e_1 + e_2, e_3\}$*, изоморфную 3-алгебре типа III.*

Множество обратимых элементов алгебры $\mathfrak{A}$

$$\widetilde{\mathfrak{A}} = \{x^0 + x^1e_1 + x^2e_2 + x^3e_3 | x^0 \neq 0,\ x^i \in \mathbb{R}\}$$

образует группу Ли, состоящую из двух связных компонент.

1. Рассмотрим 2-подалгебру $\mathbb{R}(e_3)$, изоморфную алгебре $\mathbb{R}(\varepsilon)$ дуальных чисел, с базисом $\{1,\ e_3\}$. Множество ее обратимых элементов

$$\mathbb{R}(e_3) = \{a + be_3\ \ |a \neq 0\}$$

есть подгруппа Ли и нормальный делитель группы $\widetilde{\mathfrak{A}}$, 2-плоскость без прямой.

Рассмотрим фактормножество $\widetilde{\mathfrak{A}}/\mathbb{R}(e_3)$ правых смежных классов. Оно является аддитивной группой и диффеоморфно 2-плоскости $\mathbb{R}^2$. Каноническая проекция

$$\pi: \widetilde{\mathfrak{A}} \to \mathbb{R}^2,$$

$$\pi(x^0 + x^1e_1 + x^2e_2 + x^3e_3) = \left(\frac{x^1}{x^0}, \frac{x^2}{x^0}\right). \qquad (1)$$

задает расслоение $(\widetilde{\mathfrak{A}},\ \pi,\ \mathbb{R}^2)$ с типовым слоем, диффеоморфным 2-плоскости без прямой. Справедлива

Теорема 1 *Расслоение* $(\widetilde{\mathfrak{A}},\ \pi,\ \mathbb{R})$*, определяемое формулой (1), является главным тривиальным расслоением над аддитивной группой* $\mathbb{R}^2$ *с типовым слоем, диффеоморфным 2-плоскости без прямой. Следовательно,* $\widetilde{\mathfrak{A}}$ *диффеоморфно произведению* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}(e_3)$.

2. Рассмотрим 3-подалгебру $\mathbb{R}(e_1, e_3)$ с базисом $(1,\ e_1,\ e_3)$, изоморфную алгебре плюральных чисел. Множество ее обратимых элементов

$$\mathbb{R}(e_1, e_3) = \{a + be_1 + ce_3\ \mid\ a \neq 0\}$$

есть подгруппа Ли и нормальный делитель группы $\widetilde{\mathfrak{A}}$, 3-плоскость без 2-плоскости.

Рассмотрим фактормножество $\widetilde{\mathfrak{A}}/\mathbb{R}(e_1, e_3)$ правых смежных классов. Оно является аддитивной группой и диффеоморфно прямой $\mathbb{R}$. Каноническая проекция

$$\pi: \widetilde{\mathfrak{A}} \to \mathbb{R}$$

$$\pi(x^0 + x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3) = \frac{x^2}{x^0} \tag{2}$$

задает расслоение $(\widetilde{\mathfrak{A}},\ \pi,\ \mathbb{R})$. Справедлива

Теорема 2 *Расслоение* $(\widetilde{\mathfrak{A}},\ \pi,\ \mathbb{R})$, *определяемое формулой (2), является главным тривиальным расслоением над аддитивной группой* $\mathbb{R}$ *с типовым слоем, диффеоморфным 3-плоскости без 2-плоскости. Следовательно,* $\widetilde{\mathfrak{A}}$ *диффеоморфно произведению* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}(e_1, e_3)$.

3. Пусть $\lambda \leq 0$. Рассмотрим подалгебру $\mathfrak{B}$ с базисом $(1,\ \sqrt{-\lambda}e_1 + e_2,\ e_3)$, изоморфную 3-алгебре типа III. Множество ее обратимых элементов

$$\widetilde{\mathfrak{B}} = \{a + b(\sqrt{-\lambda}e_1 + e_2) + ce_2 \mid a \neq 0\}$$

есть подгруппа Ли и нормальный делитель группы $\widetilde{\mathfrak{A}}$, 3-плоскость без 2-плоскости.

Рассмотрим фактормножество $\widetilde{\mathfrak{A}}/\widetilde{\mathfrak{B}}$ правых смежных классов. Оно является аддитивной группой и диффеоморфно прямой $\mathbb{R}$. Каноническая проекция

$$\pi: \widetilde{\mathfrak{A}} \to \mathbb{R}$$

$$\pi(x^0 + x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3) = \frac{x^1 - \sqrt{-\lambda}x^2}{x^0}. \tag{3}$$

задает расслоение $(\widetilde{\mathfrak{A}},\ \pi,\ \mathbb{R})$. Справедлива

Теорема 3 *Расслоение* $(\widetilde{\mathfrak{A}},\ \pi,\ \mathbb{R})$, *определяемое формулой (3), является главным тривиальным расслоением над аддитивной группой* $\mathbb{R}$ *с типовым слоем, диффеоморфным 3-плоскости без 2-плоскости. Следовательно,* $\widetilde{\mathfrak{A}}$ *диффеоморфно произведению* $\mathbb{R} \times \widetilde{\mathfrak{B}}$.

Библиографический список

1. Вишневский В.В., Широков А.П., Шурыгин В.В. Пространства над алгебрами. - Казань: изд. КГУ, 1985, 262 с.

2. Shirokov A.P. Spaces over Algebras and Their Applications// *Journal of Mathematical Sciences*. 2002. Vol. 108, issue 2. P. 232-248. DOI: 10.1023/A:1012896320320

3. Шапуков Б.Н. Расслоения неевклидова 3-пространства гиперболического типа, порожденные алгеброй антикватернионов. I //*Ученые записки казанского государственного университета.* Т. 147, кн. 1. 2005, С. 181-191.

4. Кэртис Ч., Райнер И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. - М.: Наука, 1969, 688 с.

5. Норден А.П. Пространства афинной связности. - М.: Наука, 1976, 432 с.

6. Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр IV. Дифференциальная геометрия.- М.: Наука, 1988, 496 с.

7. Тришина Н.Е., Тришин В.Н. Расслоения, определяемые ассоциативными унитальными алгебрами размерности 3 и 4.// *Инженерный вестник.* 2017. №11. С. 3.

8. Тришина Н.Е., Тришин В.Н. О расслоениях неприводимых алгебр размерности 3.// *Дневник науки*. 2019. №11

9. Kuzmina I., Mikes J. On pseudoconformal models of fibrations determined by algebra of antiquaternions and projectivization of them.// Annales mathematicae et informaticae. 2013. no 42. P.57-64.

10. Rosefeld B. Geometry of Lie groups. Dordrecht/ Boston/ London: Kluwer academic publishers. 1997. 393 p.

11. Study E., Cartan E. Nombers complexes// Encyclopedie des sciences mathematiques pures et appliquees. 1908. t. 1. Vol. 1. 329–468.

Оригинальность 77%