УДК: 514.8+537.8

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПАКЕТА GRTENSORIII ПРИ ИЗУЧЕНИИ ОСНОВ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ. II. СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫЕ МЕТРИКИ

Тришин В. Н.

к. ф.-м.н., доцент,

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,

Москва, Россия

Тришина Н. Е.

к. ф.-м.н., доцент,

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,

Российский химико-технологический университет им. Д. И. Менделеева,

Москва, Россия

Аннотация.

В заметке продемонстрировано использование пакета GRTensorIII для системы компьютерной алгебры Maple в учебных задачах общей теории относительности. Показано, как применять этот пакет для поиска точных решений вакуумных уравнений Эйнштейна на примере сферически симметричных метрик с использованием формализма Ньюмена-Пенроуза.

Ключевые слова: сферически симметричные метрики, метрика Шварцшильда, формализм Ньюмена-Пенроуза.

USING THE GRTENSORIII PACKAGE IN LEARNING THE BASICS OF THE GENERAL THEORY OF RELATIVITY. II. SPHERICALLY SYMMETRIC METRICS

Trishin V. N.

PhD, Associate Professor,

Bauman Moscow State Technical University,
Moscow, Russia

Trishina N. E.
PhD, Associate Professor,
Bauman Moscow State Technical University,
Mendeleev University of Chemical Technology of Russia,
Moscow, Russia

Abstract.
The paper demonstrates the use of the GRTensorIII package for the Maple computer algebra system in tutorial problems of general relativity theory. It is shown how to apply this package to find exact solutions of the vacuum Einstein equations on the example of spherically symmetric metrics using the Newman-Penrose formalism.
Keywords: spherically symmetric metrics, Schwarzschild metric, Newman-Penrose formalism.

Поиск точных решений [1] уравнений Эйнштейна является одной из основных задач общей теории относительности. В силу нелинейного характера этих уравнений данная задача является весьма нетривиальной, и даже в простейших случаях требует большого количества вычислений. Современные системы символьной компьютерной математики позволяют существенно упростить и ускорить этот процесс.

В данной методической заметке мы демонстрируем применение специализированного пакета GRTensorIII [2] для системы компьютерной математики Maple. Используя GRTensorIII мы ищем точные решения уравнений Эйнштейна в простейшем случае сферически симметричных метрик. Все вычисления проводятся в формализме спиновых коэффициентов (формализме Ньюмена-Пенроуза), подробное изложение которого содержится в учебной монографии [3]. Заметим, что пакет GRTensorIII содержит все необходимые для этого объекты и команды, делая процесс вычислений весьма компактным и удобным.

Хорошо известно [4], что общая сферически симметричная метрика имеет вид:

$$ds^2 = \mathrm{e}^{2v}\, d\, t^2 - \mathrm{e}^{2u}\, d\, r^2 - r^2\, d\theta^2 - r^2 \sin(\theta)^2\, d\phi^2, \qquad (1)$$

где $u = u(t, r)$ и $v = v(t, r)$ – некоторые функции.

Соответствующие этой метрике базисные 1-формы загрузим из предварительно написанного файла npdnsp.mpl командой

> qload(npdnsp);

$$x^a = [t \quad r \quad \theta \quad \phi]$$

$$l_a = \left[\frac{\mathrm{e}^{v(t,r)}\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\mathrm{e}^{u(t,r)}\sqrt{2}}{2} \quad 0 \quad 0\right]$$

$$n_a = \left[\frac{\mathrm{e}^{v(t,r)}\sqrt{2}}{2} \quad -\frac{\mathrm{e}^{u(t,r)}\sqrt{2}}{2} \quad 0 \quad 0\right]$$

$$m_a = \left[0 \quad 0 \quad \frac{r\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\mathrm{I}}{2} r \sin(\theta)\sqrt{2}\right]$$

$$mbar_a = \left[0 \quad 0 \quad \frac{r\sqrt{2}}{2} \quad -\frac{\mathrm{I}}{2} r \sin(\theta)\sqrt{2}\right]$$

Здесь и далее данные, которые выводит Maple, частично сокращены для удобства. Вычислим теперь компоненты контравариантных векторов изотропной тетрады Ньюмена-Пенроуза:

> grcalcalter(e(bdn,up),1): grdisplay(_);

$$e_{(a)}^{b} = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{e}^{-v(t,r)}\sqrt{2}}{2} & -\frac{\mathrm{e}^{-u(t,r)}\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\mathrm{e}^{-v(t,r)}\sqrt{2}}{2} & \frac{\mathrm{e}^{-u(t,r)}\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2r} & \frac{-\frac{\mathrm{I}}{2}\sqrt{2}}{r\sin(\theta)} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2r} & \frac{\frac{\mathrm{I}}{2}\sqrt{2}}{r\sin(\theta)} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Проверим, что мы получили необходимую сферически симметричную метрику:

> grcalcalter(g(dn,dn)),1): grdisplay(_);

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} e^{2v(t,r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{2u(t,r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin(\theta)^2 \end{bmatrix}$$

Вычислим теперь для данной тетрады спиновые коэффициенты

> grcalcalter(NPSpin,1,autoAlias): grdisplay(_);

Единственными ненулевыми коэффициентами для тетрады (2) оказываются следующие:

$$\rho = \frac{\sqrt{2}\,e^{-u}}{2r}$$

$$\mu = \frac{\sqrt{2}\,e^{-u}}{2r}$$

$$\varepsilon = \frac{(u_t e^{-v} - v_r e^{-u})\sqrt{2}}{4}$$

$$\gamma = -\frac{(u_t e^{-v} + v_r e^{-u})\sqrt{2}}{4}$$

$$\alpha = \frac{\cos(\theta)\sqrt{2}}{4r\sin(\theta)}$$

$$\beta = -\frac{\cos(\theta)\sqrt{2}}{4r\sin(\theta)}$$

Перейдём теперь к нахождению точных решений уравнений Эйнштейна. В вакууме эти уравнения принимают вид

$$R_{\mu\nu} = 0, \qquad (3)$$

где $R_{\mu\nu}$ – симметричный тензор Риччи метрики (1). Используя формализм абстрактных индексов [3] запишем тензор Риччи в спинорной форме:

$$R_{\mu\nu} = 6\Lambda\varepsilon_{AB}\varepsilon_{A'B'} - 2\Phi_{ABA'B'},$$

где $R = 24\Lambda$ – скалярная кривизна метрики, а спинор $\Phi_{ABA'B'}$ описывает бесследовую часть тензора Риччи:

$$-2\Phi_{ABA'B'} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}Rg_{\mu\nu}.$$

Тогда уравнения Эйнштейна (3) в вакууме эквивалентны следующим спинорным уравнениям:

$$\Phi_{ABA'B'} = 0, \qquad \Lambda = 0. \tag{4}$$

Вычисляя спиноры кривизны Риччи для нашей тетрады с помощью команды

> grcalcalter(NPSpin,1,autoAlias): grdisplay(_);

получим следующие ненулевые значения:

$$\Phi 00 = \frac{((u_r+v_r)\mathrm{e}^{-u}-2u_t\mathrm{e}^{-v})\mathrm{e}^{-u}}{2r}$$

$$\Phi 11 = \frac{(-v_r u_r r^2+v_r^2 r^2+v_{r,r}r^2-1)\mathrm{e}^{-2u}+1-r^2(u_{t,t}+u_t(u_t-v_t))\mathrm{e}^{-2v}}{4r^2}$$

$$\Phi 22 = \frac{\mathrm{e}^{-u}((u_r+v_r)\mathrm{e}^{-u}+2u_t\mathrm{e}^{-v})}{2r}$$

$$\Lambda = \frac{(-v_{r,r}r^2-v_r^2 r^2+(r^2u_r-2r)v_r+2u_r r-1)\mathrm{e}^{-2u}+1+r^2(u_{t,t}+u_t(u_t-v_t))\mathrm{e}^{-2v}}{12r^2}$$

Здесь использованы стандартные [3] обозначения для диадных компонент спинора Риччи:

$$\Phi 00 = \Phi_{00} = \Phi_{000'0'} = -\frac{1}{2}R_{\mu\nu}l^\mu l^\nu,$$

$$\Phi 11 = \Phi_{11} = \Phi_{010'1'} = -\frac{1}{2}R_{\mu\nu}l^\mu n^\nu + \frac{1}{8}R,$$

$$\Phi 22 = \Phi_{22} = \Phi_{111'1'} = -\frac{1}{2}R_{\mu\nu}n^\mu n^\nu,$$

$$\Lambda = \frac{1}{24}R$$

Таким образом, вакуумные уравнения Эйнштейна (4) для метрики (1) сводятся к четырём дифференциальным уравнениям для двух неизвестных функций $u(t,r)$ и $v(t,r)$:

$$\Phi 00 = 0, \quad \Phi 11 = 0, \quad \Phi 22 = 0, \quad \Lambda = 0. \tag{5}$$

После элементарных преобразований получим следующую систему уравнений:

$$u_t = 0, \tag{6}$$

$$u_r + v_r = 0, \tag{7}$$

$$(-r^2 u_r v_r + v_r^2 r^2 + v_{r,r} r^2 - 1)\mathrm{e}^{-2u} + 1 = 0, \tag{8}$$

$$(-v_{r,r}r^2 - v_r^2 r^2 + (r^2 u_r - 2r)v_r + 2u_r r - 1)\mathrm{e}^{-2u} + 1 = 0, \qquad (9)$$

откуда следует, что функция $u(t,r)$ должна удовлетворять условиям

$$u_t = 0,$$
$$2u_r r = 1 - \mathrm{e}^{2u(r)}.$$

Проинтегрируем последнее уравнение с помощью команды

```
> u(t,r):=rhs(dsolve(2*r*diff(U(r), r)=1-exp(2*U(r))));
```

$$u(t,r) = \frac{\ln(\frac{r}{-1+r\mathrm{e}^{C1}})}{2} + \frac{C1}{2}$$

Тогда получим, что

$$e^{2u} = \frac{r\mathrm{e}^{C1}}{-1+r\mathrm{e}^{C1}}$$

или, введя новое обозначение для постоянной интегрирования $2M = 1/\mathrm{e}^{C1}$,

$$e^{2u} = \frac{1}{1-\frac{2M}{r}}. \qquad (10)$$

Интегрируя уравнение (7) для функции $v(t,r)$, получим

```
> v(t,r):=rhs(dsolve(diff(V(r),r)=-simplify(diff(u(t,r),r))))+ln(f(t));
```

$$v(t,r) = -\frac{\ln(r)}{2} + \frac{\ln(-1+r\mathrm{e}^{C1})}{2} + C2 + \ln(f(t)),$$

где $f(t)$ – произвольная функция от t. Тогда

$$e^{2v} = \frac{(-1+r\mathrm{e}^{C1})f(t)^2\mathrm{e}^{2C2}}{r}.$$

Поскольку в метрику (1) функция e^{2v} входит только в комбинации с dt^2, то мы можем сделать координатное преобразование $dt' = f(t)\mathrm{e}^{C2+C1/2}dt$. Отбрасывая штрих, получим окончательный результат – общее сферически-симметричное решение вакуумных уравнений Эйнштейна:

$$ds^2 = (1-\frac{2M}{r})\,d\,t^2 - \frac{1}{1-\frac{2M}{r}}\,d\,r^2 - r^2\,d\theta^2 - r^2\sin(\theta)^2\,d\phi^2 \qquad (11)$$

Эта метрика представляет собой хорошо известное решение Шварцшильда в координатах кривизн, описывающее невращающуюся чёрную дыру. Полученный результат иллюстрирует классическую теорему Биркгофа, которая утверждает, что любое сферически-симметричное решение вакуумных уравнений Эйштейна должно быть статическим и асимптотически-плоским.

Таким образом, мы продемонстрировали на примере метрики Шварцшильда, как можно эффективно использовать пакет GRTensorIII для решения уравнений Эйнштейна в формализме Ньюмена-Пенроуза. Данный результат может быть полезен при чтении специальных курсов по общей теории относительности.

Библиографический список

1. Точные решения уравнений Эйнштейна. Шмутцер Э., ред. – М.: Энергоиздат, 1980, 416 с.

2. GRTensorIII URL: http://grtensor.phy.queensu.ca/

3. Пенроуз Р., Риндлер В. Спиноры и пространство-время. В 2 т. Т.1. Два-спинорное исчисление и релятивистские поля: пер. с англ. - М.: Мир, 1987. 528 с

4. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Грпвитация. В 3 т. Т.2. пер. с англ. - М.: Мир, 1977. 525 с

Оригинальность 80%