УДК 517.51 + УДК 372.851

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ НА ТЕМУ "ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ"

Киреева Е.А.

кандидат физико-математических наук, доцент

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана

(национальный исследовательский университет)

Москва, Россия

Аннотация

В статье рассматриваются аспекты преподавания теории выпуклых функций студентам технических университетов, обучающимся по направлению подготовки "Математика и прикладные науки", на основе опыта кафедры "Вычислительная математика и математическая физика" Московского Государственного Технического Университета им. Н.Э. Баумана. Обсуждается изложение вопросов, связанных с экстремумами выпуклых функций, связью выпуклых функций с квадратичными формами, задача с параметрами на определение выпуклости функции.

Ключевые слова: выпуклая функция, преподавание, знакоопределённая квадратичная форма, экстремум, главные миноры.

ABOUT ONE PROBLEM ON THE TOPIC "CONVEX FUNCTIONS"

Kireeva E.A.

PhD, Associate Professor,

Bauman Moscow State Technical University,

Moscow, Russia

Abstract

In the paper, we consider aspects of teaching the theory of convex functions to students of technical universities studying in the field of training "Mathematics and applied sciences" based on the experience of the department "Computational mathematics and mathematical phisics" of Bauman Moscow State Technical University. The presentation of issues related to the extrema of convex functions, the connection of convex functions with quadratic forms, and the problem with parameters to determine the convexity of a function are discussed.

Keywords: convex function, teaching, definite quadratic form, extremum, principal minors.

Выпуклые функции играют важную роль в современном анализе и геометрии, а выпуклый анализ в последнее время превратился в самостоятельную математическую дисциплину. На кафедре "Вычислительная математика и математическая физика" Московского Государственного Технического Университета им. Н.Э. Баумана понятие выпуклой функции и связанные с ним вопросы обсуждаются в курсе "Методы оптимизации и вариационное исчисление", изучаемом студентами на третьем курсе. Заметим, что мы обсуждаем понятия выпуклых множеств и выпуклых функций отдельно, прежде чем встретиться с ними при изложении элементов линейного программирования и других вопросов.

Вначале мы вводим понятие выпуклого множества и изучаем некоторые свойства таких множеств. Напомним, что множество в аффинном пространстве называется *выпуклым*, если оно вместе с любыми двумя своими точками содержит и отрезок, их соединяющий. Примером аффинного пространства, с которым мы встречаемся при определении выпуклых функций, является пространство $\mathbf{R}^n$. Выпуклым множеством в $\mathbf{R}^1$, например, является отрезок, выпуклыми множествами в $\mathbf{R}^2$ – круг или треугольник вместе с областью, им ограниченной.

Напомним, что функция f, определённая на выпуклом множестве $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, называется *выпуклой*, если для любых двух точек x и y из множества Ω, и для любого действительного числа $\lambda \in [0,1]$, выполняется неравенство

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Функция f называется *строго выпуклой*, если для любых двух точек x и y из множества Ω, таких, что $x \ne y$, и для любого действительного числа $\lambda \in (0,1)$, выполняется неравенство

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Ясно, что строго выпуклая функция является выпуклой. Для функции одной переменной понятие выпуклой (строго выпуклой) функции соответствует определению выпуклой вниз (сторого выпуклой вниз) функции в математическом анализе.

Функция f называется *сильно выпуклой*, если существует такое действительное число $\gamma > 0$, что для любых двух точек x и y из множества Ω, и для любого действительного числа $\lambda \in [0,1]$, выполняется неравенство

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) - \lambda(1-\lambda)\gamma\,|x-y|^2.$$

Можно проверить, что сильно выпуклая функция является строго выпуклой, но обратное неверно.

Наличие и количество экстремумов является важным вопросом при изучении функций. Про выпуклые функции известно, что всякая точка локального минимума является точкой её глобального минимума. Если функция строго выпуклая, то она имеет в своей области определения не более одного экстремума, и если функция сильно выпуклая, то она имеет в ней ровно один экстремум.

Следом возникает вопрос, а как определить для данной функции, является ли она выпуклой, строго выпуклой или сильно выпуклой. Для дважды дифференцируемой функции ответ на этот вопрос связан со знаком её второго дифференциала, то есть с её матрицей Гессе. Известно, что функция является выпуклой (вниз) тогда и только тогда, когда её второй дифференциал является неотрицательно определённой квадратичной формой от приращений аргументов. И если второй дифференциал является положительно определённой квадратичной формой, то функция является строго выпуклой, однако, критерием этот факт не является. Второй случай, фактически, рассматривается в курсе математического анализа, в разделе функций нескольких переменных.

Для определения неотрицательной определённости симметрической матрицы имеется критерий, как и для других случаев. Но здесь возникает расхождение в терминологии, которое может сбить студентов с толку. Мы знаем из курса линейной алгебры, что симметрическая матрица является положительно определённой тогда и только тогда, когда все её *главные* миноры положительны (критерий Сильвестра). Под *главным* минором порядка k мы здесь понимаем минор матрицы, составленный из пересечений первых k строк и первых k столбцов матрицы. Однако, очень часто такие миноры называют *угловыми*. В то время как под *главным* минором понимается любой минор, полученный из пересечения строк и столбцов с одинаковыми номерами. И критерием неотрицательной определённости симметрической матрицы является неотрицательность всех её *главных* миноров, но уже из второго определения.

К сожалению, изложение всех этих вопросов с полными доказательствами на лекциях не представляется возможным в силу нехватки времени, однако можно познакомить студентов с этой теорией хотя бы частично. Для закрепления автор предлагает студентам решить задачи со следующей формулировкой.

Найти все значения параметра a, при которых функция является выпуклой.

При решении такой задачи предполагается использовать главные миноры матрицы в смысле, указанном выше. В заключение приведём пример такой задачи.

Задача. $f(x,y) = ay^2$.

Решение. Составим матрицу Гессе для второго дифференциала функции f. Имеем $f'_x = 0$, $f'_y = 2ay$, $f''_{xx} = f''_{xy} = 0$, $f''_{yy} = 2a$.

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix}$$

Теперь посчитаем все главные миноры. Их имеется три: два первого порядка и один второго. $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 2a$, $\delta_{12} = 0$. Следовательно, функция является выпуклой тогда и только тогда, когда $a \geq 0$.

Библиографический список:

[1] Аттетков А.В., Галкин С.В., Зарубин В.С. Методы оптимизации. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003.

[2] Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1988. – 552 с.

[3] Воронцова Е.А., Хильдебрант Р.Ф., Гасников А.В., Стонякин Ф.С. Выпуклая оптимизация. – М.: МФТИ, 2021. – 364 с.

[4] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа: В 2-х ч. Часть I: Учеб.: Для вузов.– М.: Физматлит, 2005.– 648 с.

[5] Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столярова Е.М. Методы оптимизации. – М.: Наука, 1978. – 352 с.

[6] Петров Н.Н., Щелчков К.А. Введение в выпуклый анализ. – Ижевск: Издательский центр "Удмуртский университет", 2021. –212 с.

[7] Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах. – М.: Наука, 1975.

[8] Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В., Методы оптимизации. Учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры. – М.: Юрайт, 2014. – 367 с.

[9] Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. – М.: Перевод на русский язык, Мир, 1979.

Оригинальность 84%