

УДК 519.6

***ОПТИМИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ МАЛЫМ КОСМИЧЕСКИМ  
АППАРАТОМ НА ИОННЫХ ДВИГАТЕЛЯХ НА ГЕЛИОЦЕНТРИЧЕСКОМ  
УЧАСТКЕ ПЕРЕЛЕТА С ОРБИТЫ ЗЕМЛИ НА ОРБИТУ МЕРКУРИЯ***

***Мозжорина Т.Ю.***

*к.т.н., доцент,*

*Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет),*

*г. Москва, Россия*

***Цисарь Е.Д.***

*студент,*

*Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет),*

*г. Москва, Россия*

**Аннотация.**

В данной статье рассматривается расчетное исследование возможности межорбитального перелета малого космического аппарата с ионными двигателями с орбиты Земли на орбиту Меркурия. В последние годы в связи с развитием вычислительной техники усилился интерес к оптимизации межпланетных перелетов, особенно с нетрадиционными двигателями малых тяг. Предлагаемая к рассмотрению работа основана на решении задачи оптимального управления с применением принципа максимума Понтрягина. Решение краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений проведено методом пристрелки, дающим лучшую вычислительную точность по сравнению с другими численными методами решения подобных задач. Алгоритм был реализован на языке программирования C++. Учитывая эллиптичность орбиты Меркурия, расчетные исследования были проведены не только для средних значений параметров скорости и радиуса орбиты Меркурия,

но и для точек афелия и перигелия орбиты. Проведен анализ полученных результатов.

**Ключевые слова:** оптимальное управление, перелет между орбитами Земли и Меркурия, метод пристрелки, ионные двигатели, принцип максимума Понтрягина.

***OPTIMIZATION OF CONTROL OF A SMALL SPACE VEHICLE POWERED  
BY ION ENGINES ON THE HELIOCENTRIC PAGE OF FLIGHT FROM  
EARTH ORBIT TO MERCURY ORBIT***

***Mozzhorina T.Yu.***

*Ph.D., assistant professor,*

*Bauman Moscow State Technical University,*

*Moscow, Russia*

***Tsisar E.D.***

*student,*

*Bauman Moscow State Technical University,*

*Moscow, Russia*

**Abstract.**

This article considers a computational study of the possibility of an interorbital flight of a small spacecraft with ion engines from Earth orbit to Mercury orbit. In recent years, due to the development of computer technology, there has been increased interest in optimizing interplanetary flights, especially with non-traditional low-thrust engines. The proposed work is based on solving the optimal control problem using the Pontryagin maximum principle. The solution of the boundary value problem for a system of ordinary differential equations is carried out by the shooting method, which gives better computational accuracy compared with other numerical methods for solving similar problems. The algorithm was implemented in the C++ programming

language. Taking into account the ellipticity of Mercury's orbit, computational studies were carried out not only for the average values of the velocity and radius parameters of Mercury's orbit, but also for the aphelion and perihelion points of the orbit. The analysis of the obtained results is carried out.

**Keywords:** optimal control, flight between the orbits of Earth and Mercury, shooting method, ion thrusters, Pontryagin maximum principle.

### **Введение.**

В последние годы в связи с развитием вычислительной техники усилился интерес к оптимизации межпланетных перелетов численными методами, особенно с нетрадиционными двигателями малых тяг [1], [3], [5-8], [10]. Эта статья является продолжением работ авторов (сотрудников и студентов МГТУ имени Н.Э. Баумана кафедры «Вычислительной математики и математической физики») по моделированию и оптимизации управлением малоразмерных космических аппаратов (КА) при исследовании межорбитальных перелетов в Солнечной системе при использовании двигателей малых тяг. В данной работе проводится численный эксперимент перелета малого КА с ионными двигателями между орбитами Земли и Меркурия. Особенностью проведенных исследований является применение метода пристрелки при численном решении краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) [4], к решению которой сводится задача оптимального управления (ОУ) при использовании принципа максимума Понтрягина [9].

**Математическая постановка задачи.** Подробный алгоритм сведения задачи ОУ к краевой задаче описан в предыдущих работах [1], [3]. Приведем здесь только систему уравнений движения в полярной системе координат, характерную для межорбитального перелета малого КА на ионных двигателях.

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{v^2}{R} - A_0 \cdot \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 + \frac{T_{омн}}{(1-Q_{омн} \cdot t)} \cdot \sin(\theta), \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{uv}{R} + \frac{T_{омн}}{(1-Q_{омн} \cdot t)} \cdot \cos(\theta), \\ \frac{dR}{dt} = u, \\ \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{R}, \end{cases}$$

где  $t$  – время, с;  $u$  – скорость движения ракеты вдоль радиуса, м/с;  $v$  – скорость движения ракеты по касательной к окружности с центром в Солнце, м/с;  $R$  – расстояние до Солнца, м;  $\varphi$  – полярный угол положения ракеты, рад;  $R_0$  – радиус Земной орбиты, м;  $\theta$  – угол между касательной к окружности с центром в Солнце и направлением тяги, рад;  $A_0 = \frac{F_0}{m_0} = G \frac{M_c}{R_0^2}$ , м/с<sup>2</sup>;  $F_0$  – сила гравитационного притяжения Солнца на расстоянии, равном среднему радиусу Земной орбиты, Н;  $m_0$  – начальная масса КА, кг;  $G$  – гравитационная постоянная, м<sup>3</sup>/с<sup>2</sup>·кг;  $M_c$  – масса Солнца, кг;  $Q_{омн} = Q/m_0$  – отношение расхода топлива двигателя к исходной массе, сек<sup>-1</sup>;  $T_{омн} = T/m_0$  – отношение тяги двигателя к исходной массе, м/с<sup>2</sup>.

Для наглядности представлен рисунок 1, поясняющий направления скоростей и отсчета углов, взятых в соответствии с [2]. Локальный базис здесь  $\{v_0, u_0\}$  не совсем стандартный, так как положительное направление радиальной скорости  $u$  выбрано от Солнца. Вследствие чего угол  $\theta$  (управление) отсчитывается по часовой стрелке от положительного направления касательной скорости. Функционал задачи ОУ:  $J = \int_0^{t_1} dt = t_1 \rightarrow \min$ ,

то есть решается задача быстродействия.

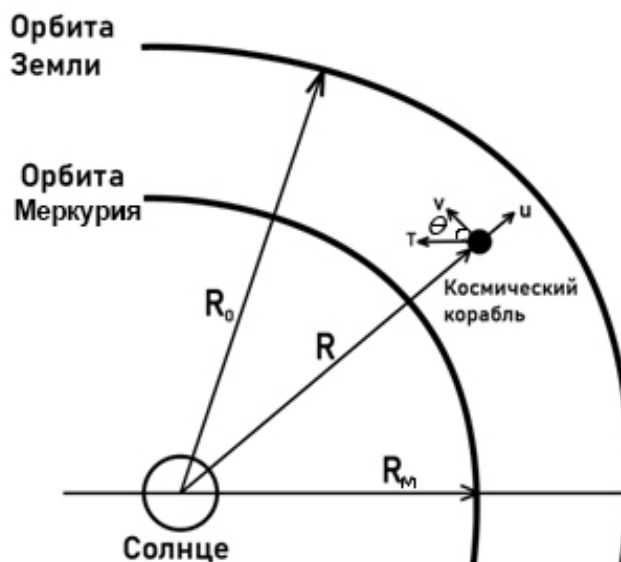


Рис.1. Схема перелета между орбитами.

Пояснение к системе уравнений движения Авторская разработка.

Функция Понтрягина в такой постановке задачи не линейна по управлению, поэтому из уравнения Эйлера по управлению можно определить оптимальный угол  $\theta$  действия тяги  $T$ . Отсюда получаем:

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin \theta^* = \frac{\Psi_u}{\sqrt{\Psi_u^2 + \Psi_v^2}}; \quad \cos \theta^* = \frac{\Psi_v}{\sqrt{\Psi_u^2 + \Psi_v^2}}.$$

Здесь  $H$  – функция Понтрягина (или Гамильтониан из вариационного исчисления и уравнений Эйлера в канонической форме),  $\theta^*$  – оптимальный угол управления тягой ионного двигателя,  $\Psi_u, \Psi_v$  – сопряженные переменные, соответствующие первым двум уравнениям системы дифференциальных уравнений.

Орбита Меркурия в отличие от орбиты Земли обладает достаточно большим эксцентриситетом. Поэтому при выборе допущений: компланарности орбит Земли и Меркурия и близкой к круговой орбиты Земли, для Меркурия были рассмотрены 3 варианта крайних условий в конце перелета. Первый вариант соответствовал скорости и расстоянию от Солнца по точке афелия орбиты планеты, второй – точке перигелия орбиты, третий – в качестве крайних

условий окончания перелета были выбраны средние значения орбитальной скорости и расстояния до Солнца.

**Численные методы, реализованные в программном комплексе.** Метод пристрелки включает в себя реализацию модифицированного метода Ньютона, метода численного интегрирования системы ОДУ – метод Рунге-Кутты четвертого порядка и метод решения СЛАУ LUP-разложением. Алгоритм был реализован на языке программирования C++.

**Результаты расчетов.** Вначале было выдвинуто предположение, что наискорейшее достижение орбиты Меркурия будет получено при краевых условиях по точке афелия, как наиболее приближенной к орбите Земли. Но, как показал численный эксперимент, это предположение не оправдалось. В таблице 1 представлены краевые условия в конце межорбитального перелета и полученное время, затраченное на достижение орбиты Меркурия.

Таблица 1. Краевые условия в конечный момент времени в рассмотренных вариантах перелета к орбите Меркурия.

Варианты	Скорость орбитальная V, км/сек	Расстояние от Солнца R, км	Время перелета t, сутки
1. По точке афелия орбиты Меркурия	38,85	$6,982 \times 10^7$	254,78
2. По точке перигелия орбиты Меркурия	58,97	$4,6 \times 10^7$	248,94
3. По средним параметрам круговой орбиты	47,36	$5,92 \times 10^7$	247,44

Несмотря на то, что разница во времени перелета небольшая, протекание физических параметров по времени существенно отличается во всех трех рассмотренных вариантах.

На рисунках 2-7 представлено изменение основных параметров процесса. Тонкая сплошная линия относится к варианту 2, более толстая сплошная – к варианту 1, пунктирная линия к варианту 3. Наиболее сложно оказалось осуществить расчет по точке перигелия. Сходимость метода Ньютона была наихудшей среди всех трех вариантов. Пришлось проводить промежуточные расчеты для других круговых орбит, постепенно добиваясь сходимости метода Ньютона и выбирая за параметры пристрелки полученные значения сопряженных переменных в предыдущем сошедшемся промежуточном варианте.

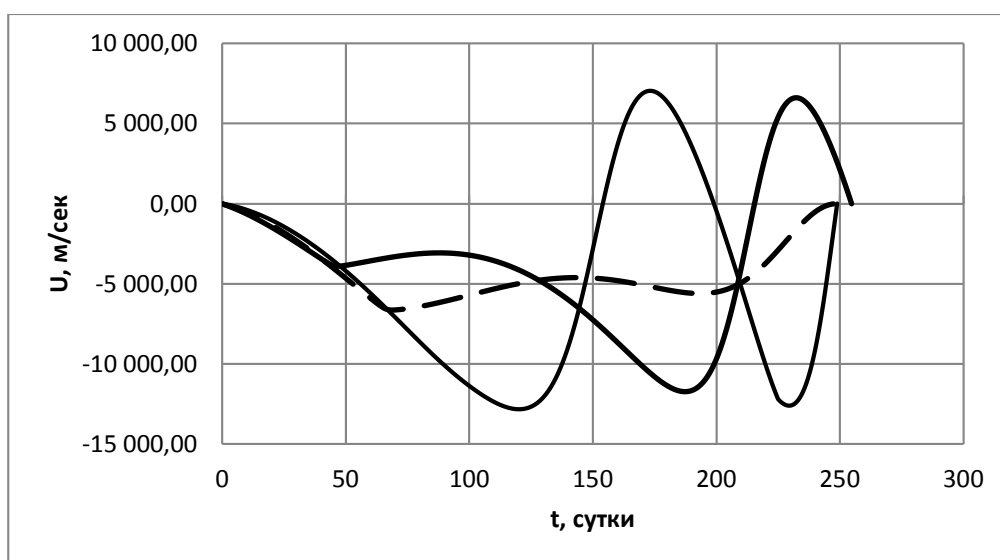


Рис.2. Изменение радиальной скорости в оптимальном процессе.

Авторская разработка.

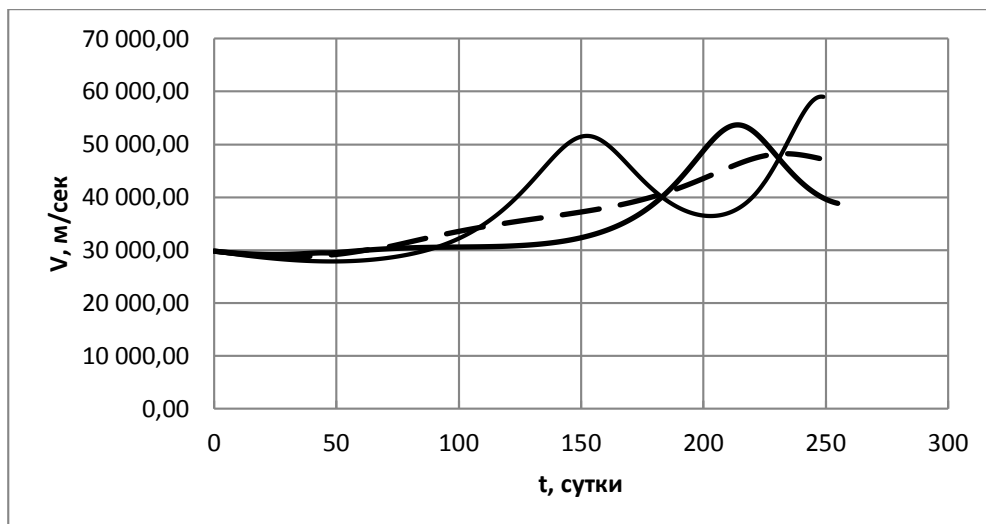


Рис.3. Изменение касательной скорости в оптимальном процессе.

Авторская разработка.

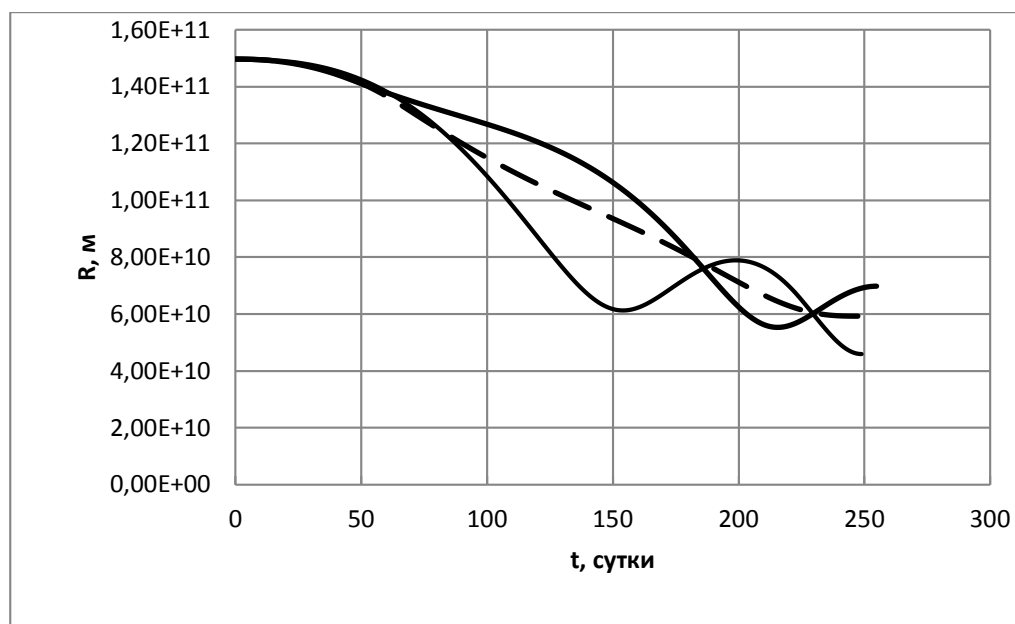


Рис.4. Изменение расстояния от КА до Солнца в оптимальном процессе.

Авторская разработка.



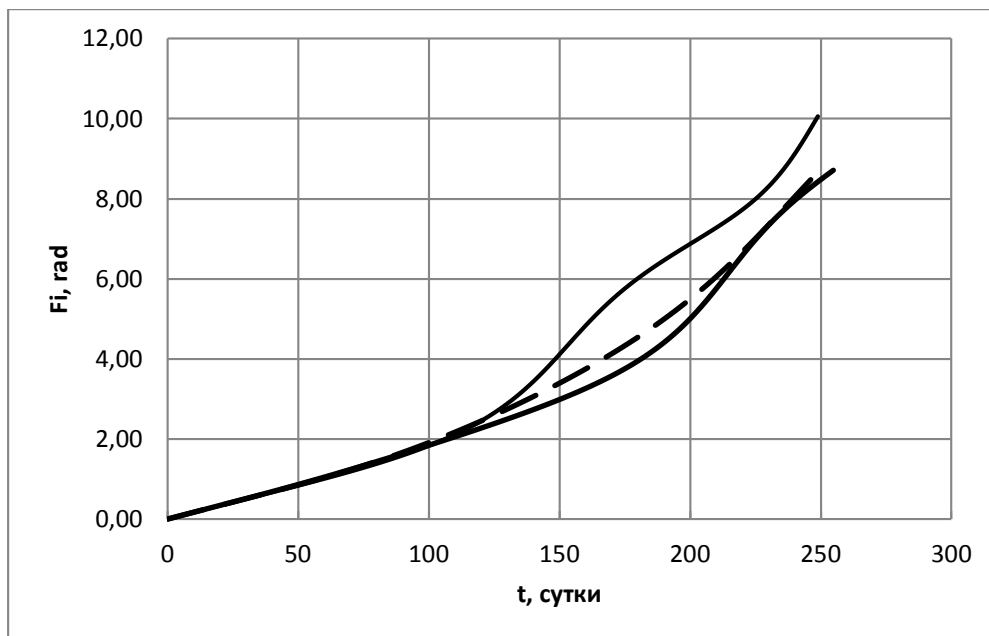


Рис. 5. Изменение полярного угла в оптимальном процессе.

Авторская разработка.

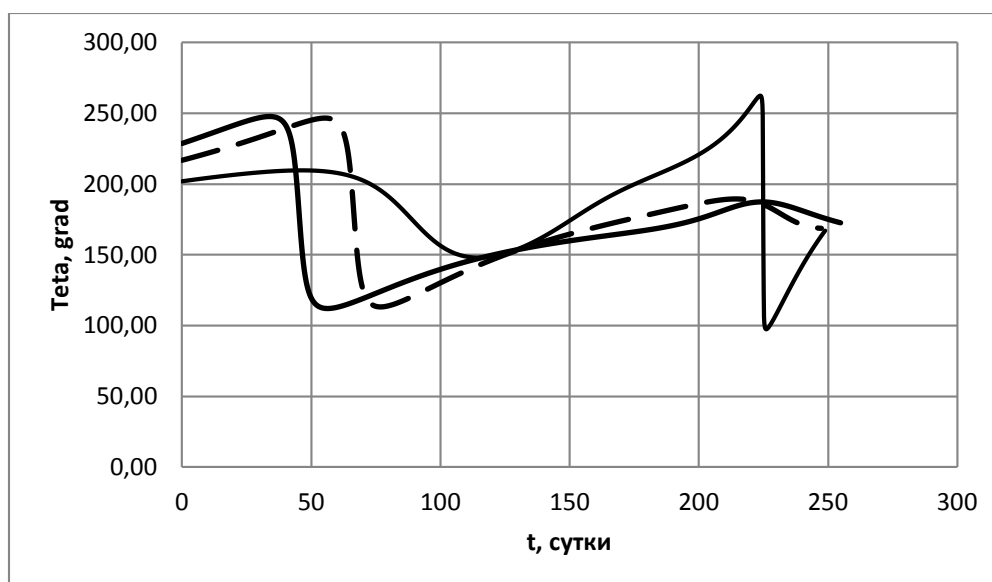


Рис. 6. Оптимальное управление, угол действия тяги двигателей КА.

Авторская разработка.

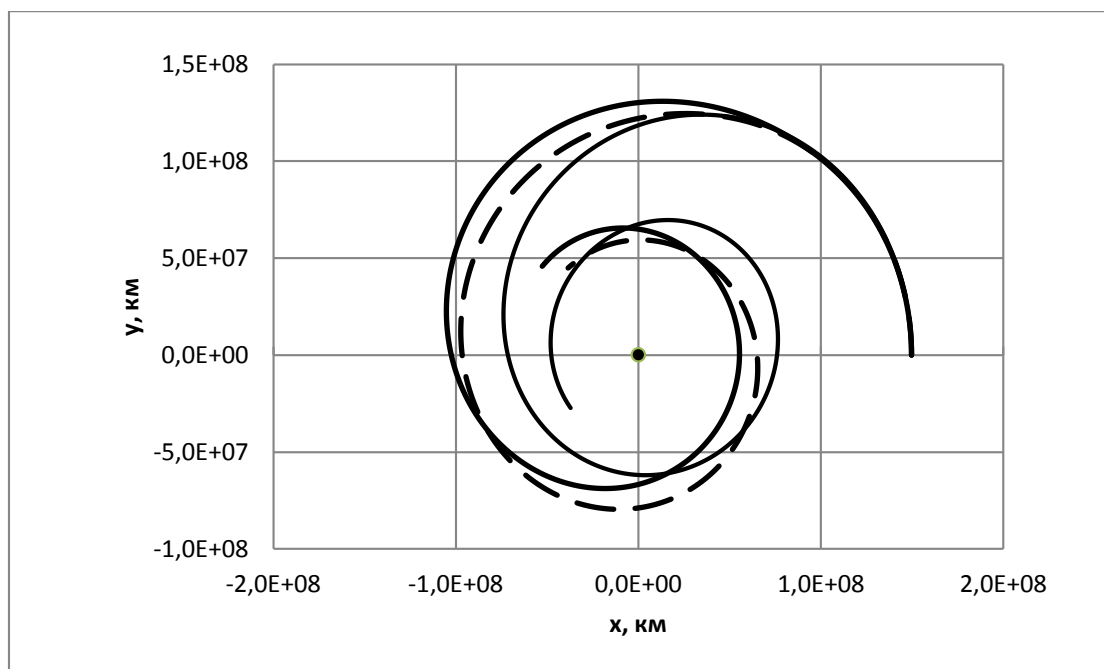


Рис. 7. Траектории движения КА в Солнечной системе в оптимальных процессах исследованных вариантов. Солнце находится в начале координат.

Авторская разработка.

**Заключение.** Проведенный численный эксперимент показал насколько различным должно быть оптимальное управление при выборе точки выхода на орбиту Меркурия. Расчет по средним значениям радиуса орбиты и орбитальной скорости оказывается непоказательным (см. рис. 6) При этом время межорбитального перелета при выбранном ускорении от ионных двигателей ( $0,00083 \text{ м/сек}^2$ ) варьируется незначительно и равно приблизительно 250 суткам.

Если рассмотреть внимательно рис. 4, то привлекает внимание тот факт, что расстояние до точки афелия орбиты Меркурия в оптимальном процессе достигается дважды, первый раз примерно на 190 сутки. При этом остается еще достаточно большой величина радиальной скорости (см. рис. 2). Если при этом рассмотреть этап выхода на круговую околопланетарную орбиту вокруг Меркурия, то может оказаться, что эта точка представляет большой интерес для рассмотрения.

**Библиографический список.**

1. Закуражная А.А. Моделирование и оптимизация управления полетом космического аппарата с Земли на орбиту Венеры с помощью ионных двигателей. / А.А. Закуражная, Т.Ю. Мозжорина // Математическое моделирование и численные методы. – 2022. – № 2 (34). С. 88-101.
2. Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета. – под ред. Дж. Лейтмана.: М.: Наука, 1965. – 538 с.
3. Мозжорина Т.Ю. Моделирование и оптимизация перелета спутников малой массы с Земной орбиты на орбиту Марса с помощью ионных двигателей. / Т.Ю. Мозжорина, Л.О. Чуванова // Математическое моделирование и численные методы. – 2021. – № 2, С. 54–67.
4. Моршнева И. В. Численное решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод стрельбы. / И. В. Моршнева, С. Н. Овчинникова. Методические указания для студентов 3 и 4 курсов мехмата. Ростов–на–Дону, УПЛ РГУ, 2003. – 29 с.
5. Музыченко Е.И., Сеницын А.А. Оптимизация межпланетных перелетов Земля—Марс с комбинированным применением ДУ большой и малой тяги. // XLV академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королева и других выдающихся отечественных ученых – пионеров освоения космического пространства. Сборник тезисов в 4 т., Том 1. М.:Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2021. – С. 437-442.
6. Орлов А. А. Методика оптимизации траекторий межпланетных перелетов с гравитационными маневрами при использовании двигателей малой тяги. / А. А. Орлов // Космические исследования. – 2019. – Т. 57, № 5, С. 361-372.
7. Салмин В.В., Четвериков А.С., Гоголев М.Ю. Расчет проектно-баллистических характеристик и формирование проектного облика межорбитальных транспортных аппаратов с электрореактивной

двигательной установкой с использованием информационных технологий. Учебное пособие. – Самара: Изд-во Самарского университета, 2019. – 196 с.

8. Старинова О.Л. Расчет межпланетных перелетов космических аппаратов с малой тягой. – Самара: Изд-во Самарский научный центр РАН, 2007. – 190 с.
9. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. – 486 с.
10. Шорников А.Ю. Оптимальное управление движением космического аппарата в поле притяжения астероида Эрос 433./ А.Ю. Шорников // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. – 2019. – Т.18, №4, С. 146-156.

*Оригинальность 77%*