УДК 512.552

ОБ ОДНОМ КОММУТАТОРЕ В АССОЦИАТИВНОМ КОЛЬЦЕ

Дерябина Г.С.

к.ф.-м.н., доцент,

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана,

Москва, Россия

Аннотация

Пусть **R** – ассоциативное и коммутативное кольцо с единицей, **A** – ассоциативная **R**-алгебра. Пусть $L_n = L_n(\mathbf{A})$ – **R**-подмодуль в **A**, порожденный всеми левонормированными коммутаторами $[a_1, . . . , a_n]$ ($a_i \in \mathbf{A}$). Пусть $T^{(n)} = T^{(n)}(\mathbf{A})$ – двусторонний идеал в **A**, порожденный множеством L_n. В 2013 году А. Бапат и Д. Джордан доказали, что если $^1/_6 \in \mathbf{R}$, то $[T^{(3)}, \mathbf{A}] \subseteq L_4$. Цель данной заметки – дать новое, более простое доказательство этого результата.

Ключевые слова: ассоциативное кольцо, коммутатор длины n, присоединенное кольцо Ли.

ON A CERTAIN COMMUTATOR IN AN ASSOCIATIVE RING

Deryabina G.S.

PhD, Associate Professor,

Bauman Moscow State Technical University,

Moscow, Russia

Abstract

Let **R** be an associative and commutative unital ring and let **A** be an associative **R**-алгебра. Let $L_n = L_n(\mathbf{A})$ be an **R**-submodule in **A** spanned by all left-normed commutators $[a_1, \ldots, a_n]$ ($a_i \in \mathbf{A}$). Let $T^{(n)} = T^{(n)}(\mathbf{A})$ be the two-sided ideal in **A** generated by L_n. In 2013 Bapat and Jordan proved that if $^1/_6 \in \mathbf{R}$ then $[T^{(3)}, \mathbf{A}] \subseteq L_4$. The aim of the present note is to give a new, simpler proof of this result.

Keywords: associative ring, commutator of length n, associated Lie ring.

Введение

Пусть **R** – ассоциативное и коммутативное кольцо с единицей, **A** – ассоциативная **R**-алгебра с единицей. Пусть $[a_1, a_2] = a_1a_2 - a_2a_1$ ($a_1, a_2 \in \mathbf{A}$). Для $n > 2$ определим левонормированный коммутатор $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ рекурсивно равенством $[a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n] = [[a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}], a_n]$ ($a_i \in \mathbf{A}$). Определим $L_n = L_n(\mathbf{A})$ как **R**-подмодуль в **A**, порожденный всеми коммутаторами $[a_1, \ldots, a_n]$ ($a_i \in \mathbf{A}$). Пусть $T^{(n)} = T^{(n)}(\mathbf{A})$ – двусторонний идеал в **A**, порожденный множеством L_n, то есть $T^{(n)} = \mathbf{A}L_n\mathbf{A} = \mathbf{A}L_n$.

Исследование нижнего центрального ряда

$$\mathbf{A} = L_1 \supset L_2 \supset L_3 \supset \ldots \supset L_n \supset \ldots$$

присоединенной алгебры Ли $\mathbf{A}^{(-)}$ свободной ассоциативной алгебры **A** и его факторов L_n / L_{n+1} было начато в 2007 году в пионерской работе Б. Фейгина и Б. Шойхета [6]. Результаты Б. Фейгина и Б. Шойхета были развиты в многочисленных статьях разных авторов, прежде всего П. Этингофа и его учеников (см., например, обзор [1] и статьи [2, 3, 5]).

В исследовании факторов L_n/L_{n+1} важную роль играет следующее утверждение, доказанное А. Бапат и Д. Джорданом в 2013 году.

Теорема (А. Бапат и Д. Джордан [2]). Пусть **R** – произвольное ассоциативное и коммутативное кольцо, содержащее $^1/_6$. Пусть **A** – произвольная ассоциативная **R**-алгебра. Тогда

$$[T^{(3)}, \mathbf{A}] \subseteq L_4.$$

Отметим, что в [2] эта теорема была доказана в случае, когда **R –** поле характеристики 0, однако приведенное там доказательство остается верным, когда **R** – ассоциативное и коммутативное кольцо, содержащее $^1/_6$. Теорема означает, что в алгебре Ли $\mathbf{A}/L_4$ образ идеала $T^{(3)}$ централен.

Цель данной заметки – дать новое, более простое, чем в оригинальной статье [2], доказательство данной теоремы.

Замечание. Приведенная выше теорема, вообще говоря, неверна, если $^1/_3 \notin \mathbf{R}$.

Действительно, для любых элементов a, b, c, d, e $\in$ **A** выполнено $[[a, b, c]\, d, e] \in [T^{(3)}, \mathbf{A}]$. С другой стороны,

$$[[a, b, c]\, d, e] = [a, b, c][d, e] + [a, b, c, e]\, d,$$

где $[a, b, c, e]\, d \in T^{(4)}$, а произведение $[a, b, c][d, e]$, вообще говоря, не лежит в $T^{(4)}$, если $^1/_3 \notin \mathbf{R}$ (см. [4, 7]). Значит, в этом случае $[[a, b, c]\, d, e]$, вообще говоря, не лежит в $T^{(4)}$ и тем более не лежит в $L_4 \subseteq T^{(4)}$.

Таким образом, если $^1/_3 \notin \mathbf{R}$**,** то, вообще говоря, $[T^{(3)}, \mathbf{A}] \not\subset L_4$.

Вспомогательное утверждение

Пусть **A –** произвольное ассоциативное кольцо, пусть u, v $\in$ **A**. Будем писать $u \equiv v \pmod{L_4}$, если $u = v + w$, где $w \in L_4$.

Лемма. Пусть u, v, x, y, z $\in$ **A**; пусть σ – произвольная подстановка на множестве {x, y, z}. Тогда

$$[[u, v, \sigma(x)]\, \sigma(y), \sigma(z)] \equiv \mathrm{sgn}\,(\sigma)\ [[u, v, x]\, y, z]\ (\mathrm{mod}\ L_4)$$

где sgn (σ) равно 1 для четных подстановок σ и -1 для нечетных подстановок σ.

Другими словами, по модулю L_4 выражение [[u, v, x] y, z] антисимметрично относительно перестановок элементов x, y, z.

Доказательство. Хорошо известны и легко могут быть проверены следующие тождества:

(1) $$[u, vw] = v\,[u, w] + [u, v]\,w \quad (u, v, w \in \mathbf{A}),$$

(2) $$[uv, w] + [vw, u] + [wu, v] = 0 \quad (u, v, w \in \mathbf{A}).$$

Пусть u, v, x, y, z $\in$ **A.** Из (1) следует, что

$$[u, v, xy, z] = [[[u, v], xy], z] = [(x\,[[u, v], y] + [[u, v], x]\,y), z] =$$

$$= [(x\,[[u, v], y]), z] + [([[u, v], x]\,y), z] =$$

$$= [[[u, v], y]\,x, z] - [[[u, v], y], x, z] + [[[u, v], x]\,y, z],$$

откуда вытекает, что

$$[[u, v, y]\,x, z] + [[u, v, x]\,y, z] = [u, v, xy, z] + [[[u, v], y], x, z] \equiv 0\ \mathrm{mod}(L_4),$$

то есть

(3) $$[[u, v, y]\,x, z] \equiv -\,[[u, v, x]\,y, z]\ \mathrm{mod}(L_4).$$

С другой стороны, из (2) вытекает, что

$$[[u, v, x]\, y, z] + [yz, [u, v, x]] + [z\, [u, v, x], y] = 0,$$

то есть

$$[[u, v, x]\, y, z] - [[u, v, x], yz] + [[u, v, x]\, z, y] - [[[u, v, x], z], y] = 0,$$

поэтому

$$[[u, v, x]\, y, z] + [[u, v, x]\, z, y] = [[u, v, x], yz] + [[[u, v, x], z], y] \equiv 0 \bmod (L_4).$$

Таким образом,

$$[[u, v, x]\, y, z] \equiv - [[u, v, x]\, z, y] \bmod (L_4). \qquad (4)$$

Из (3) и (4) следует, что по модулю L_4 выражение $[[u, v, x]\, y, z]$ антисимметрично относительно транспозиций (xy) и (yz). Эти транспозиции порождают всю группу подстановок S_3 на множестве $\{x, y, z\}$. Если $\sigma \in S_3$ – четная подстановка, то σ является произведением четного числа транспозиций (xy) и (yz), поэтому

$$[[u, v, \sigma(x)]\, \sigma(y), \sigma(z)] \equiv [[u, v, x]\, y, z] \pmod{L_4}.$$

Аналогично, если $\sigma \in S_3$ – нечетная подстановка, то σ – произведение нечетного числа транспозиций (xy) и (yz) и

$$[[u, v, \sigma(x)]\, \sigma(y), \sigma(z)] \equiv - [[u, v, x]\, y, z] \pmod{L_4}.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы.

Заметим, что каждый элемент из $[T^{(3)}, \mathbf{A}]$ является суммой элементов вида $[[a, b, c]\, d, e]$, где $a, b, c, d, e \in \mathbf{A}$, поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что $[[a, b, c]\, d, e] \in L_4$ для любых $a, b, c, d, e \in \mathbf{A}$.

Пусть a, b, c, d, e – произвольные элементы алгебры **A**. По тождеству Якоби

$$[[a, b, c]\, d, e] + [[b, c, a]\, d, e] + [[c, a, b]\, d, e] = 0,$$

откуда

$$[[a, b, c]\, d, e] = - [[c, a, b]\, d, e] + [[c, b, a]\, d, e].$$

По лемме

$$- [[c, a, b]\, d, e] + [[c, b, a]\, d, e] \equiv - [[c, a, d]\, e, b] + [[c, b, d]\, e, a] \pmod{L_4},$$

а так как $[u, v] = - [v, u]$ $(u, v \in \mathbf{A})$, то

$$- [[c, a, d]\, e, b] + [[c, b, d]\, e, a] = [[d, [c, a]]\, e, b] - [[d, [c, b]]\, e, a],$$

так что

$$[[a, b, c]\, d, e] \equiv [[d, [c, a]]\, e, b] - [[d, [c, b]]\, e, a] \pmod{L_4}.$$

Так как

$$[[d, [c, a]]\, e, b] = [[d, c, a]\, e, b] - [[d, a, c]\, e, b],$$

$$[[d, [c, b]]\, e, a] = [[d, c, b]\, e, a] - [[d, b, c]\, e, a],$$

а, по лемме,

$$[[d, c, a] e, b] - [[d, a, c] e, b] \equiv [[d, c, e] b, a] - [[d, a, b] c, e] \pmod{L_4},$$

$$[[d, c, b] e, a] - [[d, b, c] e, a] \equiv [[d, c, e] a, b] - [[d, b, a] c, e] \pmod{L_4}$$

то

$$[[d, [c, a]] e, b] - [[d, [c, b]] e, a] =$$

$$= [[d, c, a] e, b] - [[d, a, c] e, b] - [[d, c, b] e, a] + [[d, b, c] e, a] \equiv$$

$$\equiv [[d, c, e] b, a] - [[d, a, b] c, e] - [[d, c, e] a, b] + [[d, b, a] c, e] \pmod{L_4}.$$

По лемме,

$$[[d, c, e] b, a] \equiv - [[d, c, e] a, b] \pmod{L_4},$$

а с другой стороны

$$- [[d, a, b] c, e] + [[d, b, a] c, e] = - [[d, [a, b]] c, e],$$

поэтому

$$[[d, c, e] b, a] - [[d, a, b] c, e] - [[d, c, e] a, b] + [[d, b, a] c, e] \equiv$$

$$\equiv -2 [[d, c, e] a, b] - [[d, [a, b]] c, e] \pmod{L_4} = -2 [[d, c, e] a, b] + [[a, b, d] c, e],$$

так что

$$[[a, b, c] d, e] \equiv -2 [[d, c, e] a, b] + [[a, b, d] c, e] \pmod{L_4}.$$

Так как, по лемме,

$$[[a, b, d] c, e] \equiv - [[a, b, c] d, e] \pmod{L_4},$$

то

$$[[a, b, c]\, d, e] \equiv -2\, [[d, c, e]\, a, b] - [[a, b, c]\, d, e] \pmod{L_4},$$

то есть

$$(5) \qquad 2\, [[a, b, c]\, d, e] \equiv -\, 2\, [[d, c, e]\, a, b] \pmod{L_4}.$$

Аналогично,

$$(6) \qquad 2\, [[a, b, d]\, e, c] \equiv -\, 2\, [[e, d, c]\, a, b] \pmod{L_4},$$

$$(7) \qquad 2\, [[a, b, e]\, c, d] \equiv -\, 2\, [[c, e, d]\, a, b] \pmod{L_4}.$$

Суммируя левые части сравнений (5), (6) и (7) и используя лемму, получим

$$2\, ([[a, b, c]\, d, e] + [[a, b, d]\, e, c] + [[a, b, e]\, c, d]) \equiv 6\, [[a, b, c]\, d, e] \pmod{L_4}.$$

С другой стороны, суммируя правые части сравнений (5), (6) и (7) и используя тождество Якоби, получим

$$-2([[d, c, e]\, a, b] + [[e, d, c]\, a, b] + [[c, e, d]\, a, b]) =$$

$$= -2([([d, c, e] + [c, e, d] + [e, d, c])\, a, b]) = 0.$$

Таким образом,

$$6\, [[a, b, c]\, d, e] \equiv 0 \pmod{L_4},$$

то есть

$$6\, [[a, b, c]\, d, e] \in L_4$$

для любых $a, b, c, d, e \in L_4$. Так как $^1/_6 \in \mathbf{R}$, получаем, что

$$[[a, b, c]\, d, e] \in L_4$$

для любых a, b, c, d, e $\in L_4$, что и требовалось. Теорема доказана.

Библиографический список

1. Abughazalah N., Etingof P. On properties of the lower central series of associative algebras / N. Abughazalah, P. Etingof // Journal of Algebra and Its Applications. – 2016. – V. 15. – 1650187 (24 pages).

2. Bapat A., Jordan D. Lower central series of free algebras in symmetric tensor categories / A. Bapat, D. Jordan // Journal of Algebra. – 2013. – V. 373. – P. 299–311.

3. Bhupatiraju S., Etingof P., Jordan D., Kuszmaul W., Li J. Lower central series of a free associative algebra over the integers and finite fields / S. Bhupatiraju, P. Etingof, D. Jordan, W. Kuszmaul, J. Li // Journal of Algebra. – 2012. – V. 372. – P. 251–274.

4. Deryabina G., Krasilnikov A. The torsion subgroup of the additive group of a Lie nilpotent associative ring of class 3 / G. Deryabina, A. Krasilnikov // Journal of Algebra. – 2015. – V. 428. – P. 230–255.

5. Etingof P., Kim J., Ma X. On universal Lie nilpotent associative algebras / P. Etingof, J. Kim, X. Ma // Journal of Algebra. – 2009. – V. 321. – P. 697–703.

6. Feigin B., Shoikhet B. On [A, A] / [A, [A, A]] and on W_n-action on the consecutive commutators of free associative algebras / B. Feigin, B. Shoikhet // Mathematical Research Letters. – 2007. – V. 14. – P. 781–795.

7. Krasilnikov A. The additive group of a Lie nilpotent associative ring / A. Krasilnikov // Journal of Algebra. – 2013. – V. 392. – P. 10–22.

Оригинальность 86%