УДК 514.172 + УДК 372.851

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ НА ТЕМУ "ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА"

Киреева Е.А.

кандидат физико-математических наук, доцент

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана

(национальный исследовательский университет)

Москва, Россия

Аннотация

В статье рассматриваются аспекты преподавания теории выпуклых множеств студентам технических университетов, обучающимся по направлению подготовки "Математика и прикладные науки", на основе опыта кафедры "Вычислительная математика и математическая физика" Московского Государственного Технического Университета им. Н.Э. Баумана. Обсуждается задача с параметрами, направленная на освоение понятий выпуклого множества и вершины выпуклого множества на примере множеств на плоскости.

Ключевые слова: аффинное пространство, отрезок в аффинном пространстве, выпуклое множество, преподавание, вершина выпуклого множества.

ABOUT ONE PROBLEM ON THE TOPIC "CONVEX SETS"

Kireeva E.A.

PhD, Associate Professor,

Bauman Moscow State Technical University,

Moscow, Russia

Abstract

In the paper, we consider aspects of teaching the convex set theory to students of technical universities studying in the field of training "Mathematics and applied sciences" based on the experience of the department "Computational mathematics and mathematical phisics" of Bauman Moscow State Technical University. We discuss a problem with parameters aimed at mastering the concepts of a convex set and a vertex of a convex set using the example of sets on the plane.

Keywords: affine space, segment in affine space, convex set, teaching, vertex of a convex set.

Понятие выпуклости играет значительную роль в анализе и геометрии. В последние десятилетия были написаны обширные монографии, целиком посвящённые так называемому выпуклому анализу, в которых выпуклость и её приложения являются основными объектами исследования. На кафедре "Вычислительная математика и математическая физика" Московского Государственного Технического Университета им. Н.Э. Баумана понятие выпуклого множества обсуждается в курсе "Методы оптимизации и вариационное исчисление", изучаемом студентами на третьем курсе.

Вначале мы вводим понятие выпуклого множества и изучаем некоторые свойства таких множеств, чтобы затем изучить свойства выпуклых функций, которые определяются только на выпуклых множествах. Немного позднее это понятие появляется при изложении элементов линейного программирования.

Следуя [3], понятие выпуклого множества автор предпочитает вводить для произвольного аффинного пространства. Хотя часто это понятие вводят для произвольного векторного пространства над полем действительных чисел. Поскольку каждое такое векторное пространство является аффинным пространством, то противоречия не возникает. Основным примером аффинного и векторного пространства для нас является, конечно, пространство $\mathbf{R}^n$.

Напомним, что *отрезком* $[p,q]$ в аффинном пространстве S, где p, q – элементы множества S, называется множество всех точек x множества S таких, что

$$x = \lambda \cdot p + (1 - \lambda) \cdot q,$$

для $\lambda \in [0, 1]$. Множество в пространстве S называется *выпуклым*, если оно вместе с любыми двумя своими точками содержит и отрезок, их соединяющий. Нетрудно проверить, что отрезок в аффинном пространстве является выпуклым множеством, пересечение выпуклых множеств также является выпуклым множеством. Выпуклыми множествами в пространстве $\mathbf{R}^n$ являются, например, круг или треугольник вместе с областью, им ограниченной. Заметим, что пустое множество также является выпуклым.

Вершиной выпуклого множества называется точка этого множества, которую нельзя представить в виде $x = \lambda \cdot p + (1 - \lambda) \cdot q$, где $p, q \in S$, $p \neq q$, $\lambda \in (0, 1)$. То есть, такая точка не лежит внутри никакого отрезка, принадлежащего данному множеству. Вершинами треугольника с областью внутри являются вершины этого треугольника в обычном смысле. А вот с кругом ситуация более непривычная. Его вершинами будут все точки окружности. Пустое множество вершин не имеет.

Для того, чтобы студенты потренировались в отработке этого понятия, автор предлагает им задачу с параметром, которая имеет следуещее условие:

Найти все значения параметра а, при которых множество (на плоскости) является выпуклым. В случае выпуклого множества найти его вершины.

Идея такой задачи состоит в том, что искомое множество задано, как пересечение нескольких множеств, все кроме одного из которых стационарны, и ещё одно множество изменяется на плоскости в зависимости от значения параметра. При этом либо все множества кроме последнего выпуклы, а последнее множество "портит" ситуацию, либо, наоборот, пересечение всех множеств, кроме последнего не выпукло, а пересечение с последним множеством должно "исправить" ситуацию.

Приведём теперь примеры.

Задача 1. $X = \{ x \in \boldsymbol{R}^2 \mid y \geq x^2, y \leq 1, x^2 + y^2 \geq a^2 \}$

Решение. Первое множество представляет собой все точки на параболе $y = x^2$, а также выше этой параболы. Второе множество – все точки на или ниже горизонтальной прямой $y = 1$. Оба эти множества выпуклые, и их пересечение также выпуклое. Множество точек, удовлетворяющее неравенству $x^2 + y^2 \geq a^2$ представляет собой все точки на или вне окружности с центром в точке (0,0) и радиуса $|a|$. Это множество не является выпуклым, если $|a| > 0$, и совпадает со всей плоскостью, если $a = 0$. Поэтому итоговое пересечение не является выпуклым, если $0 < a \leq \sqrt{2}$ (см. рис. 1), и является выпуклым, если $a = 0$, или если $|a| > \sqrt{2}$, когда пересечение оказывается пустым. Вершинами в первом случае будут все точки параболы, которые принадлежат данному множеству.

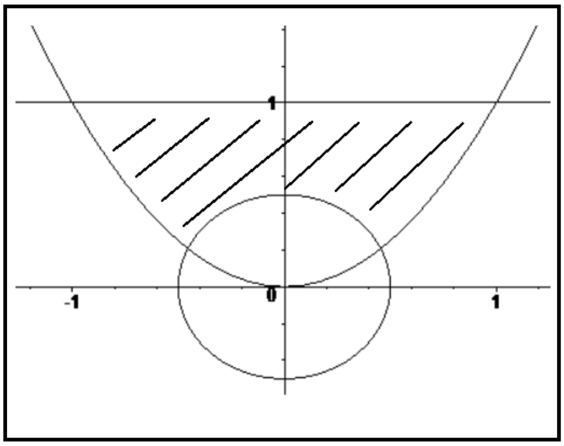

Рис. 1. Задача 1, случай невыпуклого множества.

(Рисунок выполнен автором)

Задача 2. $X = \{\, x \in \boldsymbol{R^2} \mid y \le x^2 + 1,\, x^2 + y^2 \le a^2 \,\}$

Решение. Первое множество представляет собой все точки на или ниже параболы $y = x^2 + 1$. Это множество не является выпуклым. Второе множество предсталяет собой множество точек круга с центром (0,0) и радиуса $|a|$, это множество выпуклое. Поэтому пересечение будет выпуклым для тех a, для которых окружность $x^2 + y^2 = a^2$ либо не пересекается с параболой, либо имеет с ней одну общую точку – вершину параболы, то есть для $|a| \le 1$, и не выпуклым, если $|a| > 1$ (см. рис. 2) Вершинами выпуклого множества будут все точки окружности.

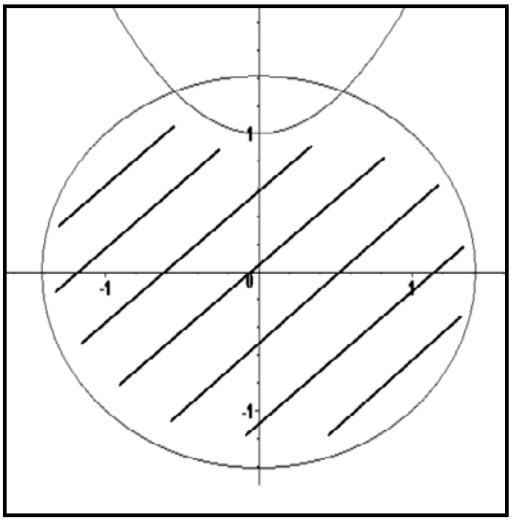

Рис. 2. Задача 2, случай невыпуклого множества. (Рисунок выполнен автором)

Библиографический список:

[1] Аттетков А.В., Галкин С.В., Зарубин В.С. Методы оптимизации. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003.

[2] Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1988. – 552 с.

[3] Винберг Э.Б. Курс алгебры. – 2-е изд., испр. и доп. М.: Факториал Пресс, 2001. 544 с.

[4] Воронцова Е.А., Хильдебрант Р.Ф., Гасников А.В., Стонякин Ф.С. Выпуклая оптимизация. – М.: МФТИ, 2021. – 364 с.

[5] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа: В 2-х ч. Часть I: Учеб.: Для вузов.– М.: Физматлит, 2005.– 648 с.

[6] Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столярова Е.М. Методы оптимизации. – М.: Наука, 1978. – 352 с.

[7] Петров Н.Н., Щелчков К.А. Введение в выпуклый анализ. – Ижевск: Издательский центр "Удмуртский университет", 2021. –212 с.

[8] Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах. – М.: Наука, 1975.

[9] Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В., Методы оптимизации. Учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры. – М.: Юрайт, 2014. – 367 с.

[10] Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. – М.: Перевод на русский язык, Мир, 1979.

Оригинальность 84%