УДК 510.63 + УДК 372.851

ОСОБЕННОСТИ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ СТУДЕНТАМ ТЕХНИЧЕСКИХ ВУЗОВ

Киреева Е.А.

кандидат физико-математических наук, доцент

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана

(национальный исследовательский университет)

Москва, Россия

Аннотация

В статье рассматриваются аспекты преподавания математической логики студентам технических университетов, обучающимся по направлению подготовки "Математика и прикладные науки", на основе опыта кафедры "Вычислительная математика и математическая физика" Московского Государственного Технического Университета им. Н.Э. Баумана. Обсуждаются объём изложения теоретических вопросов исчисления высказываний и исчисления предикатов, задачи для домашних заданий и контрольных работ.

Ключевые слова: логика высказываний, исчисление высказываний, исчисление предикатов, преподавание, аксиоматическая теория.

FEATURES OF TEACHING MATHEMATICAL LOGIC TO TECHNICAL UNIVERSITIES STUDENTS

Kireeva E.A.

PhD, Associate Professor,

Bauman Moscow State Technical University,

Moscow, Russia

Abstract

In the paper, we consider aspects of teaching mathematical logic to students of technical universities studying in the field of training "Mathematics and applied sciences" based on the experience of the department "Computational mathematics and mathematical phisics" of Bauman Moscow State Technical University. We discuss the volume of presentation of propositional calculus and predicate calculus, tasks for homework and tests.

Keywords: propositional logic, propositional calculus, predicate calculus, teaching, axiomatic theory.

Математическая логика занимает в математике особое место. С одной стороны, её часто рассматривают как науку о правилах проводить рассуждения. Именно с такой точки зрения, как науку о высказываниях и логических функциях, логику часто изучают в рамках курсов дискретной математики. С другой стороны, одной из основных задач математической логики является анализ и развитие оснований математики. Также именно из её идей возникло точное определение понятия алгоритма, что позволило решить вопросы, которые без этого понятия оставались бы неразрешимыми.

В рамках общего курса дискретной математики и математической логики, читаемого на кафедре "Вычислительная математика и математическая физика" Московского Государственного Технического Университета им. Н.Э. Баумана, математическая логика преподаётся в последней трети семестра. Однако, при этом, булевы функции рассматриваются в начале курса, без привязки к логике, но, скорее, как часть теории множеств и алгебры. Так делается потому, что, как мы сейчас понимаем, булевы функции не обязательно могут быть интерпретированы как логические функции. Булевым функциям соответствуют, например, также релейно-контактные схемы и схемы из функциональных элементов.

Непосредственно в курсе математической логики мы вначале рассматриваем *логику высказываний*. Под *высказываниями* понимают утвердительные предложения, про которые можно сказать, что они *истинны* или *ложны*. При этом математическая логика отвлекается от содержания высказываний, но обращает внимание на то, каким образом из простых высказываний получаются составные, и что можно сказать про их истинностные значения. Аппаратом для изучения логики высказываний являются булевы функции, которые в нашем курсе уже были изучены ранее. Это даёт нам возможность обсудить эти вопросы достаточно быстро, и далее перейти к более сложным вопросам *формальных аксиоматических теорий*.

При изложении этого и последующих вопросов мы, в основном, следуем монографиям [10], [12] и, немного, [7]. При этом мы обращаем внимание студентов на тот факт, что всегда при изучении логики для нас фактически существуют две логики: *исследуемая логика* и *логика исследователя*. И если первую мы изучаем формально, то второй мы пользуемся в своих рассуждениях, поскольку сама способность проводить логические рассуждения является неотъемлемой частью человеческого сознания.

Далее мы определяем, что именно нужно, чтобы задать формальную аксиоматическую теорию: *символы* данной теории, *формулы*, для которых предполагается существование алгоритма, позволяющего определить, является ли данное слово, составленное из символов, формулой, *аксиомы* данной теории, которыми являются некоторые формулы, а также *правила вывода*. Также для формальной аксиоматической теории мы определяем понятия *вывода,* а также *вывода из гипотез*. Делается это для формализации понятия *доказательства*, которое является важнейшим в математике.

Следом мы приступаем к изучению *исчисления высказываний*, как формальной аксиоматической теории. Этой теории посвящена основная часть нашего курса. Исчисление высказываний, будучи не столь сложной, например, по сравнению с исчислением предикатов, теорией, позволяет познакомить студентов со всеми аспектами этой теории с большим уровнем строгости. Поэтому мы определяем, какие символы является символами данной теории, какие последовательности символов называются формулами, какие формулы называют аксиомами данной теории, и какие имеются правила вывода. Следуя [10], мы определяем *схемы* аксиом, содержащие бесконечно много аксиом, и только одно правило вывода, так называемый *modus ponens*.

После этого мы показываем на примерах, как доказывается выводимость формул в исчислении высказываний, а именно, как напрямую построить вывод формулы из аксиом, пользуясь только правилом вывода. Студенты могут оценить, что это весьма непросто. После этого мы можем доказать теорему дедукции, которая может облегчить дальнейший вывод формул.

Следом, мы доказываем *полноту в широком смысле* исчисления высказываний, то есть тот факт, что формула в исчислении высказываний является выводимой тогда и только тогда, когда она является *тавтологией*, то есть тождественно истинной формулой, в логике высказываний. После доказательства этой теоремы проверка выводимости формулы становится тривиальной. Также мы обсуждаем следующую отсюда *разрешимость* исчисления высказываний.

Далее мы доказываем *непротиворечивость* исчисления высказываний, *независимость* каждой схемы аксиом от двух других, и *полноту в узком смысле*, то есть тот факт, что добавление к аксиомам любой невыводимой формулы и формул, получающихся из неё подстановками вместо букв произвольных формул, приводит к противоречию.

После этого мы переходим к изучению *исчисления предикатов*. Здесь мы не ставим целью изучить эту теорию с такой же степенью подробности, как исчисление высказываний. Однако, мы обсуждаем здесь понятия *предиката*, *квантора*, *формулы* исчисления предикатов, *свободных* и *связанных* переменных, изучаем основные правила действий с формулами, содержащими кванторы, приведение данной формулы к *предварённой нормальной форме*, то есть к такому виду, что все кванторы стоят в начале формулы, а также понятие *интерпретации*. Данное понятие необходимо для того, чтобы определить логически общезначимые и выполнимые формулы.

Напомним, что формула называется *логически общезначимой*, если она истинна в любой своей интерпретации, и *выполнимой*, если существует интерпретация, в которой она истинна. Студенты могут потренироваться в построении примеров интерпретаций для различных формул, например, на множестве натуральных чисел.

В заключение мы приведём список задач, которые мы предлагаем студентам в качестве домашнего задания, а также на контрольной работе.

1) Построить вывод формулы исчисления высказываний, используя только аксиомы и теорему дедукции (задание в ДЗ).

2) Доказать выводимость формулы, используя полноту исчисления высказываний в широком смысле.

3) Определить какие переменные являются свободными, связанными в данной формуле исчисления предикатов.

4) Найти предварённую нормальную форму данной формулы, переименовав, если нужно, переменные.

5) Определить, является ли формула исчисления предикатов логически общезначимой, выполнимой.

Библиографический список:

[1] Акимов О.Е. Дискретная математика: Логика, группы, графы. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 352 с.: ил.

[2] Алексеев В.Б. Дискретная математика: учебник. – М.: Инфра-М, 2021.

[3] Алексеев В.Е. Дискретная математика: Учебное пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2017. –139 с.

[4] Аляев Ю.А., Тюрин С.Ф. Дискретная математика и математическая логика. М.: Финансы и статистика, 2006. – 368 с.: ил.

[5] Андерсон Джеймс А. Дискретная математика и комбинаторика. : Пер. с англ. – М.: Издательский дом "Вильямс". 2004. – 960 с.

[6] Ерусалимский Я.М. Дискретная математика: теория, задачи, приложения. 3-е издание. − М.: Вузовская книга, 2000. − 280 с.

[7] Клини С.К. Введение в метаматематику. – М.: Издательство иностранной литературы, 1957.

[8] Мальцев А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции. – М., Наука, 1986. – 368 с.

[9] Марков А.А. Теория алгоритмов. – Тр. МИАН СССР, Изд-во АН СССР, 1954.

[10] Мендельсон Э. Введение в математическую логику. – М.: Наука, 1971.

[11] Нефёдов В.Н., Осипова В.А. Курс дискретной математики.: Учебное пособие. – М.: Изд-во МАИ, 1992. – 264 с.: ил.

[12] Новиков П.С. Элементы математической логики. – М.: Наука, 1973.

[13] Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. : Учеб. пособие для вузов / Под ред. В.А.Садовничего. – 4-е изд., стер. – М.: Высш. шк.; 2003. – 384 с.

Оригинальность 82%