УДК 519.17 + УДК 372.851

ОСОБЕННОСТИ ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ СТУДЕНТАМ ТЕХНИЧЕСКИХ ВУЗОВ

Киреева Е.А.

кандидат физико-математических наук, доцент

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)

Москва, Россия

Аннотация

В статье рассматриваются аспекты преподавания теории графов студентам технических университетов, обучающимся по направлению подготовки "Математика и прикладные науки", на основе опыта кафедры "Вычислительная математика и математическая физика" Московского Государственного Технического Университета им. Н.Э. Баумана. Обсуждаются выбранные для преподавания темы, их теоретические основы и приложения, структура домашних заданий и контрольных работ.

Ключевые слова: граф, преподавание, планарный граф, дерево, орграф.

FEATURES OF TEACHING THE GRAPH THEORY TO TECHNICAL UNIVERSITIES STUDENTS

Kireeva E.A.

PhD, Associate Professor,

Bauman Moscow State Technical University, *Moscow, Russia*

Abstract

In the paper, we consider aspects of teaching of graph theory to students of technical universities studying in the field of training "Mathematics and applied sciences" based on the experience of the department "Computational mathematics and mathematical phisics" of Bauman Moscow State Technical University. We discuss the topics chosen for teaching, their theoretical foundations and applications, the structure of homeworks and tests.

Keywords: graph, teaching, planar graph, tree, digraph.

Теория графов является важной частью дискретной математики. В последние десятилетия эта теория активно развивается. В рамках общего курса дискретной математики и математической логики, читаемого на кафедре "Вычислительная математика и математическая физика" Московского Государственного Технического Университета им. Н.Э. Баумана, теории графов выделяются три лекции. Это не много, поэтому основная задача, которая стоит перед лектором, состоит в том, чтобы познакомить студентов с самыми базовыми понятиями и фактами этой теории.

На первой лекции мы вводим строгие определения для понятий *графа*, *мультиграфа* и *псевдографа*, *инцидентных* вершин и рёбер, *пути* и *цикла* в графе, *связного* графа. При изложении этого и следующих вопросов автор, в основном, следует монографии [5]. Несмотря на ограниченность во времени, автор считает важным определить граф в рамках теории множеств, то есть как пару множеств – вершин и рёбер, где каждое ребро – это неупорядоченная пара вершин, не ограничиваясь графической интерпретацией. Здесь же мы можем определить *эйлеровы циклы* и *эйлеровы пути*, сформулировать и доказать критерии их существования. Данный вопрос является классическим для теории графов, и к тому же имеет интересную историческую предисторию – знаменитую задачу о кёнигсбергских мостах. Также на первой лекции мы определяем *гамильтоновы* циклы и пути. Известно, что простого критерия их существования до сих пор не найдено.

Ещё один важный вопрос, который необходимо рассмотреть – это *планарность* графов, то есть возможность изобразить граф на плоскости без пересечения рёбер. Следует дать определения многих новых понятий – *полного* графа, *двудольного* графа, *полного двудольного* графа, *расширения* графа, *производного* графа, *гомеоморфных* графов, *грани* планарного графа, снабдив все эти определения примерами, в частности, необходимыми в дальнейшем примерами полного и полного двудольного графов K_5 и $K_{3,3}$. После этого появляется возможность сформулировать и доказать *формулу Эйлера*, которая утверждает, что если имеется связный планарный граф с B вершинами, P рёбрами и Γ гранями, то имеет место равенство

$$B - P + \Gamma = 2.$$

Следует отметить, что данная формула не является критерием планарности, поскольку для графов, не являющихся планарными, понятие грани вообще не определено. В заключение этой темы мы формулируем, но не доказываем *теорему Куратовского*, утверждающую, что граф является планарным тогда и только тогда, когда он не содердит подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$ или K_5. Несмотря на то, что мы не имеем возможности доказать эту теорему, студенты могут потренироваться в её применении на простых примерах. При этом обычно доказать, что граф является планарным гораздо проще, чем доказать, что не является – нужно просто изобразить его на плоскости соответствующим образом.

Следующая важная тема в теории графов – это деревья. *Дерево* мы определяем как связный граф без циклов. Это понятие широко используется в информатике: в кодировании, алгоритмах поиска и сортировки данных, и не только. В нашем курсе мы ограничиваемся формулировками и доказательствами двух основных критериев того, что граф является деревом, а именно, тем фактом, что граф является деревом тогда и только тогда, когда между любыми двумя его вершинами имеется единственный путь, и тем фактом, что граф является деревом тогда и только тогда, когда это связный граф, у которого вершин на единицу больше, чем рёбер. Можно упомянуть и другие необходимые и достаточные условия.

Кроме того, мы определяем также *корневые* деревья и, в качестве примера, знакомим студентов с таким важным приложением данной теории, как *бинарное дерево поиска*, которое даёт нам эффективный способ организации хранения и поиска данных. В качестве упражнений мы предлагаем студентам построить бинарное дерево поиска для данного списка слов, добавить в умеющееся дерево новое слово, и удалить слово с сохранением структуры дерева.

Последний вопрос, который мы рассматриваем в нашем курсе – это орграфы, размеченные орграфы и алгоритмы поиска кратчайшего пути. Напомним, что *ориент ированным графом* или *орграфом* называется пара из множеств вершин и рёбер, где (ориентированное) ребро – это упорядоченная пара вершин. То есть, в ориентированном ребре вершины, которое оно соединяет, не равноправны, одну из них мы считаем началом, а другую – концом. Можно представить, что если в обычном графе вершины изображают населённые пункты, а рёбра – соединяющие их дороги, то в орграфе ориентированные рёбра – это дороги с односторонним движением. При этом орграф называется *размеченным*, если каждому ребру дополнительно приписано некоторое число, обычно положительное. Такую метку можно понимать, например, как расстояние между данными населёнными пунктами.

Кратчайший путь из одной вершины в другую в размеченном орграфе можно, конечно, найти простым перебором всех возможных вариантов. Но то, что для совсем небольшого графа сделать несложно, для графов больших размеров начинает представлять слишком трудоёмкую задачу. Для оптимизации решения существуют алгоритмы поиска кратчайшего пути, самые известные из них – это алгоритм Дейкстры и алгоритм Флойда-Уоршолла. Первый обладает большей наглядностью, в то время как второй более эффективен по времени и объёму требуемой памяти компьютера. В нашем курсе, в силу того, что мы не предполагаем во время изучения курса написания компьютерных программ, для подробного изложения был выбран алгоритм Дейкстры. Главное, в чём мы настаиваем, это чтобы студенты избегали соблазна найти кратчайший путь перебором, но тренировались в реализации алгоритма.

В заключение мы приведём список заданий, которые предлагается выполнить студентам в качестве домашнего задания (все из них), а также (выборочно) на контрольной работе.

1) Для данного графа определить содержит ли граф эйлеров цикл, эйлеров путь, не являющийся циклом.

2) Для данного графа определить является ли он планарным.

3) Используя алфавитный порядок, построить для данного списка бинарное дерево поиска, удалить из дерева первое слово списка.

4) Используя алгоритм Дейкстры найти кратчайший путь и длину кратчайшего пути из одной указанной вершины в другую вершину размеченного орграфа.

Библиографический список:

[1] Акимов О.Е. Дискретная математика: Логика, группы, графы. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 352 с.: ил.

[2] Алексеев В.Б. Дискретная математика: учебник. – М.: Инфра-М, 2021.

[3] Алексеев В.Е. Дискретная математика: Учебное пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2017. –139 с.

[4] Аляев Ю.А., Тюрин С.Ф. Дискретная математика и математическая логика. М.: Финансы и статистика, 2006. – 368 с.: ил.

[5] Андерсон Джеймс А. Дискретная математика и комбинаторика. : Пер. с англ. – М.: Издательский дом "Вильямс". 2004. – 960 с.

[6] Белоусов А.И., Мартынов Б.В., Щетинин А.Н. Лекции по дискретной математике. − М.: Изд-во МГТУ, 1994.

[7] Дистель Р. Теория графов. Пер. с англ. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2002. – 336 с.

[8] Ерусалимский Я.М. Дискретная математика: теория, задачи, приложения. 3-е издание. − М.: Вузовская книга, 2000. − 280 с.

[9] Ложкин С.А. Лекции по основам кибернетики (учебное пособие для студентов) − М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2004 г. — 253 с.

[10] Нефёдов В.Н., Осипова В.А. Курс дискретной математики: Учебное пособие. – М.: Изд-во МАИ, 1992. – 264 с.: ил.

[11] Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. : Учеб. пособие для вузов / Под ред. В.А.Садовничего. – 4-е изд., стер. – М.: Высш. шк.; 2003. – 384 с.

Оригинальность 79%