УДК 519.1 + УДК 372.851

ОСОБЕННОСТИ ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕОРИИ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ СТУДЕНТАМ ТЕХНИЧЕСКИХ ВУЗОВ

Киреева Е.А.

кандидат физико-математических наук, доцент

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана

(национальный исследовательский университет)

Москва, Россия

Аннотация

В статье рассматриваются аспекты преподавания теории булевых функций студентам технических университетов, обучающимся по направлению подготовки "Математика и прикладные науки", на основе опыта кафедры "Вычислительная математика и математическая физика" Московского Государственного Технического Университета им. Н.Э. Баумана. Изучается связь фундаментальных понятий и приложений данной теории к решению практических задач. Обсуждается структура домашних заданий и контрольных работ.

Ключевые слова: булева функция, преподавание, теорема Поста, контактная схема, схема из функциональных элементов.

FEATURES OF TEACHING THE THEORY OF BOOLEAN FUNCTIONS TO TECHNICAL UNIVERSITIES STUDENTS

Kireeva E.A.

PhD, Associate Professor,

Bauman Moscow State Technical University,

Moscow, Russia

Abstract

In the paper, we consider aspects of teaching of the theory of boolean functions to students of technical universities studying in the field of training "Mathematics and applied sciences" based on the experience of the department "Computational mathematics and mathematical phisics" of Bauman Moscow State Technical University. We study the relation between fundamemtal notions and applications of this theory to solving practical problems. We also discuss the structure of homeworks and tests.

Keywords: boolean function, teaching, Post's theorem, contact scheme, scheme of functional elements.

Курс дискретной математики в настоящее время читается во многих университетах. При этом подходы к преподаванию этого курса и, в частности, теории булевых функций, как важной составной части курса, различаются. Перед автором данной статьи, читающим курс дискретной математики в Московском Государственном Техническом Университете им. Н.Э. Баумана для студентов, обучающихся по направлению подготовки "Математика и прикладные науки", стояла задача, с одной стороны, рассказать о теоретических основах и важнейших понятиях этой теории в самом общем виде, и о различных прикладных аспектах, с другой.

При изложении теории булевых функций был выбран теоретико-множественный и, отчасти, алгебраический подход. А именно, на первой лекции мы знакомим студентов с понятиями *булева кольца* и *булевой алгебры*. При этом студентам легко усмотреть связь данного курса с изучаемым ранее курсом высшей алгебры.

Напомним, что *булевым кольцом* называется (ассоциативное) кольцо с единицей, каждый элемент которого идемпотентен, то есть удовлетворяет тождеству $x^2 = x$. Как следствие, это кольцо является коммутативным и имеет характеристику 2. *Булевой алгеброй* называется непустое множество с определёнными на нём двумя бинарными операциями $\vee$ и $\wedge$, унарной операцией C и выделенными элементами 0 и 1, удовлетворяющее следующим аксиомам: коммутативности $\vee$ и $\wedge$, ассоциативности $\vee$ и $\wedge$, дистрибутивности $\vee$ относительно $\wedge$, и $\wedge$ относительно $\vee$, тождества, то есть $x \vee 0 = x$, $x \wedge 1 = x$, и дополнения $x \vee Cx = 1$, $x \wedge Cx = 0$. Важным примером булевой алгебры является множество всех подмножеств некоторого непустого множества A с операциями объединения, пересечения, дополнения и выделенными элементами $\varnothing$ и A. И булевы кольца, и булевы алгебры являются классическими понятиями в высшей алгебре.

Хорошо известно, что между булевыми кольцами и булевыми алгебрами существует естественное взаимно однозначное соответствие. А именно булево кольцо становится булевой алгеброй, если положить

$$x \vee y = x + y + xy$$

$$x \wedge y = xy,$$

$$Cx = 1 + x.$$

В свою очередь, булева алгебра становится булевым кольцом, если положить

$$x + y = (x \wedge Cy) \vee (Cx \wedge y)$$

$$xy = x \wedge y.$$

Данное соответствие называется *стоуновской двойственностью* между булевыми алгебрами и булевыми кольцами. Понятия и свойства булевых алгебр и колец рассмотрены, например, в [6] и [5].

Далее мы вводим понятие булевой функции, как функции, отображающей декартову *n*-ю степень множества $B=\{0,1\}$ в множество B, где 0 и 1 – два различных элемента, и рассматриваем основные примеры унарных и бинарных булевых функций: *отрицание, константу 0, константу 1, конъюнкцию, дизъюнкцию, сложение по модулю 2, импликацию, эквиваленцию, стрелку Пирса* и *штрих Шеффера*. Задать данные булевы функции можно таблицами. Это необходимо, в частности, и для того, чтобы в дальнейшем ввести операции на множестве всех булевых функций.

Затем мы определяем понятия *существенных* и *фиктивных* переменных для данной булевой функции и *равных* булевых функций. *Равными* называются такие булевы функции, что одна из них может быть получена из другой с помощью конечного числа операций введения или удаления фиктивных переменных. Заметим, что фактически мы вводим на множестве булевых функций отношение эквивалентности, и в дальнейшем работаем не с функциями, а с классами эквивалентности, хотя обычно внимание на этом вопросе не акцентируется. Тем не менее, автор считает правильным обратить внимание студентов на этот факт, учитывая, что само понятие отношения эквивалентности им уже знакомо.

Теперь можно ввести важнейшие понятия *композиции* функций и *формулы* над множеством булевых функций. *Формулы* над множеством булевых функций определяются следующим образом: если Ω – некоторое множество булевых функций, то всякая функция из множества Ω – формула над Ω, и если $h_1, h_2, \ldots, h_k$ – переменные или формулы над Ω, и функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ принадлежит множеству Ω, то $f(h_1, h_2, \ldots, h_k)$ – формула над Ω. Таким образом, мы получаем возможность выражать одни булевы функции через другие, а также определить на множестве всех булевых функций операции и, как следствие, структуры булевой алгебры и булева кольца. Здесь студенты должны понять разницу между собственно функциями, которых для фиксированного количества переменных конечное число, и неоднозначными способами их задания. Также понятие формулы над множеством булевых функций закладывает основу для введения позднее понятия замыкания множества булевых функций, которое необходимо для изложения важнейшей теоремы Поста.

Далее мы определяем понятия совершенной дизъюнктивной нормальной формы, совершенной конъюнктивной нормальной формы и полинома Жегалкина − классические способы представления булевых функций. Здесь важны как теоретические аспекты их существования и единственности, так и практические навыки их получения из заданной таблицей функции.

Важное значение имеет вопрос минимизации булевых функций. Для этой цели мы используем *карты Карно*. Данный метод обладает большой наглядностью, хотя и приводит к сложной программе при реализации на компьютере. Тем не менее, при решении небольших задач он очень удобен. Заметим, что наряду со свойствами

$$xy \vee \bar{x} y = y, x \vee x = x,$$

на которых и основан метод, бывает очень полезно дополнительно использовать законы поглощения

$$x \vee xy = x, x \vee \bar{x} y = x \vee y.$$

Потом мы вводим понятия *замыкания* множества булевых функций. Замыканием множества булевых функций Ω называется множество всех функций, которые реализуются формулами над Ω. Два важнейших случая – это случай, когда замыкание множества совпадает с исходным множеством (такие множества играют активную роль в доказательстве теоремы Поста), и случай, когда замыкание исходного множества равно множеству всех булевых функций. В первом случае такое множество называется *замкнут ым*, во втором – *полным*.

Полнота множества Ω означает, что любую булеву функцию можно выразить через функции множества Ω. Классическим примером полного множества является набор, состоящий из конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. Однако, как хорошо известно, этот набор не является минимальным, можно обойтись только конъюнкцией и отрицанием, или только дизъюнкцией и отрицанием. Другими примерами полных множеств являются штрих Шеффера и стрелка Пирса. Каждая из этих функций сама по себе является полным множеством.

Ответ на вопрос, каким образом можно проверить, что множество является полным, даёт теорема Поста. Поскольку это очень интересное с точки зрения теории и чрезвычайно полезное для приложений свойство, то мы считаем, что стоит потратить время, чтобы полностью доказать эту теорему. В качестве упражнений мы предлагаем студентам для данного набора функций (часто состоящего из одной функции) проверить все условия, необходимые для того, чтобы этот набор был полным, то есть проверить его на принадлежность к классам T_0, T_1, классам самодвойственных, монотонных и линейных функций.

Первым важным приложением теории булевых функций является интерпретация булевых функций как функций алгебры логики. В данном случае элементы 1 и 0 из основного множества интерпретируют как "истина" и "ложь". Заметим, что часто булевы функции так и называют "функциями алгебры логики". Но, несмотря на то, что булевы функции и операции над ними появились именно для нужд математической логики, позднее стало понятно, что возможны и другие, не менее важные интерпретации. Поэтому в настоящий момент теория булевых функций часто изучается как часть теории множеств, без привязки к логике. В читаемом автором курсе математической логике выделена отдельная (последняя) часть курса. Но булевы функции изучаются отдельно, в первой части курса, в которой акцент делается на другие приложения.

Вторым важным приложением теории булевых функций являются *конт акные* или *релейно-конт акт ные* схемы. Под контактной схемой понимают устройство из проводников и двухпозиционных контактов, замыкающих и размыкающих. Каждый контакт подключён к некоторому реле. Состояние каждого контакта можно рассматривать как переменную, принимающую два значения. На чертежах все замыкающие контакты, подключенные к реле x, обозначаются символом x, а размыкающие – символом $\overline{x}$. Таким образом, всей схеме соответствует булева функция от переменных x_1, x_2, ... x_n , соответствующих реле, параллельному подключению контактов соответствует дизъюнкция переменных, последовательному – конъюнкция.

Здесь мы можем предложить студентам решить задачи *синт еза* и *анализа* контактных схем. Булева функция, сответствующая контактной схеме, называется в данном случае также *функцией проводимост и.* При синтезе контактной схемы необходимо, возможно, минимизировав вначале булеву функцию, построить соответствующую ей контактную схему. При анализе по данной контактной схеме необходимо выяснить условия работы схемы и найти соответствующую ей функцию проводимости.

Ещё одним важным приложением теории булевых функций являются *схемы из функциональных элемент ов.* Функциональные элементы – это некоторые технические устройства, с помощью которых реализуются основные операции в теории булевых функций – конъюнкция, дизъюнкция и отрицание. Элементы для конъюнкции и дизъюнкции имеют два входа и один выход, для отрицания – один вход и один выход. Схема из функциональных элементов представляет собой сеть, в которой имеются входы в количестве, соответствующим количеству переменных булевой функции, а на ее выход с помощью включения функциональных элементов подается сигнал, соответствующий значению булевой функции. Также схемой из функциональных элементов называют чертёж, изображающий такую схему, каждый функциональный элемент при этом имеет специальное обозначение. Полнота множества, состоящего из конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, гарантирует нам, что из функциональных элементов можно собрать любую булеву функцию. Хорошо известно, что схемы из функциональных элементов используются для создания устройств, обрабатывающих информацию в цифровой форме, например, компьютеров.

Студентам мы здесь предлагаем одну основную задачу – по данной булевой функции составить схему из функциональных элементов, точнее, изобразить соответстующий чертёж. Можно также в качестве иллюстрации основной идеи предложить составить схему, реализующую, например, полусумматор, то есть схему, которая позволяет найти сумму $(a+b)$, где a и b – одноразрядные двоичные числа.

В заключение мы приведём список заданий, которые предлагается выполнить студентам в качестве домашнего задания, а также на контрольной работе. Поскольку студентам важно приобрести навыки выполнения всех основных заданий, мы включаем почти все из них в оба эти контрольные мероприятия:

1) Для функции, представленной формулой, составить таблицу значений. (задание в ДЗ)

2) Найти СДНФ данной функции.

3) Найти СКНФ данной функции.

4) Найти полином Жегалкина данной функции.

5) Минимизировать данную функцию.

6) Проверить данную функцию на полноту, изучив все пять свойств.

7) Составить контактную схему для данной функции.

8) Составить схему из функциональных элементов для данной функции.

Библиографический список:

[1] Акимов О.Е. Дискретная математика: Логика, группы, графы. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 352 с.: ил.

[2] Алексеев В.Б. Дискретная математика: учебник. – М.: Инфра-М, 2021.

[3] Алексеев В.Е. Дискретная математика: Учебное пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2017. –139 с.

[4] Аляев Ю.А., Тюрин С.Ф. Дискретная математика и математическая логика. М.: Финансы и статистика, 2006. – 368 с.: ил.

[5] Андерсон Джеймс А. Дискретная математика и комбинаторика. : Пер. с англ. – М.: Издательский дом "Вильямс". 2004. – 960 с.

[6] Белоусов А.И., Мартынов Б.В., Щетинин А.Н. Лекции по дискретной математике. − М.: Изд-во МГТУ, 1994.

[7] Ерусалимский Я.М. Дискретная математика: теория, задачи, приложения. 3-е издание. − М.: Вузовская книга, 2000. − 280 с.

[8] Ложкин С.А. Лекции по основам кибернетики (учебное пособие для студентов) − М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2004 г. — 253 с.

[9] Нефёдов В.Н., Осипова В.А. Курс дискретной математики: Учебное пособие. – М.: Изд-во МАИ, 1992. – 264 с.: ил.

[10] Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. : Учеб. пособие для вузов / Под ред. В.А.Садовничего. – 4-е изд., стер. – М.: Высш. шк.; 2003. – 384 с.

Оригинальность 80%