УДК 519.6

АДАПТИВНЫЙ МЕТОД ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОИЗВОДНОЙ

ТИЩЕНКО И.Ю.,
студент бакалавриата,
Кубанский государственный аграрный университет имени И. Т. Трубилина,
Краснодар, Россия

ТИЩЕНКО Д. Ю.,
студент бакалавриата,
Кубанский государственный аграрный университет имени И. Т. Трубилина,
Краснодар, Россия

ЗАВГОРОДНИЙ С. А.,
студент бакалавриата,
Кубанский государственный аграрный университет имени И. Т. Трубилина,
Краснодар, Россия

БЕРЕЖАНСКАЯ С. А.,
студентка бакалавриата,
Крымский федеральный университет имени В. И. Вернадского,
Симферополь, Россия

Аннотация.
В данной статье представлен новый метод численного интегрирования, основанный на адаптивном разбиении интервала и использовании информации о производной функции. Метод предлагает более точную и эффективную оценку определенного интеграла, приспосабливая количество прямоугольников в разбиении в зависимости от изменений функции и ее производной на интервале.

Ключевые слова: численное интегрирование, адаптивное разбиение, производная функции, определенный интеграл.

ADAPTIVE NUMERICAL INTEGRATION METHOD USING DERIVATIVE

TISHCHENKO I.Y.,
undergraduate student,
Kuban State Agrarian University named after I. T. Trubilin,
Krasnodar, Russia

TISHCHENKO D.Y.,
undergraduate student,
Kuban State Agrarian University named after I. T. Trubilin,
Krasnodar, Russia

ZAVGORODNY S. A.,
undergraduate student,
Kuban State Agrarian University named after I. T. Trubilin,
Krasnodar, Russia

BEREZHANSKAYA S. A.,
undergraduate student,
Crimean Federal University named after V. I. Vernadsky,
Simferopol, Russia

Annotation.
This article presents a new numerical integration method based on adaptive interval partitioning and the use of information about the derivative of the function. The method offers a more accurate and efficient estimation of a certain integral by adjusting the

number of rectangles in the partition depending on changes in the function and its derivative in the interval.

Keywords: numerical integration, adaptive partitioning, derivative of a function, definite integral.

Введение. В численном интегрировании широко применяются различные методы для приближенного вычисления определенных интегралов [1-2, 4-5, 7]. Одним из основных проблем метода прямоугольников является выбор подходящего шага разбиения на интервале интегрирования и определение количества прямоугольников, которые следует использовать для приближенного вычисления интеграла, чтобы добиться необходимой точности решения [2].

Цель исследования. Целью данного исследования является разработка нового метода численного интегрирования, который позволяет адаптивно разбивать интервал интегрирования и использовать информацию о производной функции для достижения более точных результатов при вычислении определенных интегралов.

Основная часть. Метод адаптивного численного интегрирования основан на принципе адаптивного разбиения интервала и использовании информации о производной функции. Идея состоит в том, чтобы разбить исходный интервал на подынтервалы с переменной шириной, ориентируясь на производную функции. Таким образом, в областях с большими изменениями функции и производной используется более плотное разбиение, в то время как в областях с малыми изменениями можно использовать меньшее количество прямоугольников. Это должно позволить более эффективно распределить ресурсы вычислений и получить более точную оценку интеграла.

Реализация метода включает несколько шагов. Сначала необходимо определить функцию, для которой требуется вычислить определенный интеграл. Затем следует выбрать интервал интегрирования [a, b] и задать требуемую точность или погрешность. Далее производится адаптивное разбиение интервала на прямоугольники с использованием информации о производной функции.

Процесс разбиения может быть реализован следующим образом:

1. Инициализируем список прямоугольников, начально добавляя один прямоугольник, охватывающий весь интервал [a, b].
2. Вычисляем производную функции на каждом прямоугольнике, используя выбранный метод численного дифференцирования.
3. Проверяем производные на каждом прямоугольнике: если производные близки к нулю, значит, функция на данном прямоугольнике практически постоянна, и мы не нуждаемся в дальнейшем разбиении этого прямоугольника. Если производные значительны, разбиваем прямоугольник на два новых подпрямоугольника, деля его пополам.
4. Повторяем шаги 2 и 3 для каждого нового прямоугольника, полученного в результате разбиения, пока не достигнем заданной точности.

Пример реализации данного метода на языке программирования Python:

```
import numpy as np
import sympy as sp
from scipy.misc import derivative


def adaptive_integration(func, a, b, tolerance):
  def recursive_integration(func, a, b, tol):
      # Вычисляем значения функции в точках a, b и середине отрезка
        fa = func(a)
        fb = func(b)
        fm = func((a + b) / 2)
```

```
        # Вычисляем производную в точке середины отрезка
        dfm = derivative(func, (a + b) / 2)
        dfa = derivative(func, a)
        dfb = derivative(func, b)
        # Вычисляем площадь текущего прямоугольника
        area = (b - a) * min(fa, fb)
        # Проверяем условие остановки
        if abs(area - (b - a) * fm) < tol or (abs(dfm) < 1e-6 and abs(dfa) < 1e-6 and abs(dfb) < 1e-6):
            return area
        else:
            # Рекурсивно разбиваем прямоугольник на два более маленьких
            left_area = recursive_integration(func, a, (a + b) / 2, tol)
            right_area = recursive_integration(func, (a + b) / 2, b, tol)
            return left_area + right_area
    return recursive_integration(func, a, b, tolerance)
```

Данную функцию можно использовать, передавая ей нужную функцию func, интервал [a, b] и желаемую точность tolerance. Например, чтобы вычислить интеграл функции $f(x) = x^2$ на интервале [0, 1] с точностью 0.001, можно вызвать функцию следующим образом:

```
def f(x):
    return x ** 2

result = adaptive_integration(f, 0, 1, 0.001)
print(result)
```

Для демонстрации применения метода на практике можно выбрать несколько различных функций. Например, можно рассмотреть функцию с особенностями, такими как разрывы, точки экстремума, а также функцию с быстро меняющимися значениями или нерегулярным поведением. Для этого воспользуемся ранее приведённым кодом на Python, но немного дополним его так, чтобы он выводил графики с помощью библиотеки Mathplotlib.

Пример 1. Функция с разрывом (рис.1):

$$f(x) = \frac{sin(x)}{x} + 1,\ \text{на интервале } [-2\pi, 2\pi]$$

В данном случае метод, реализованный с помощью python, без проблем находит значение интеграла с заданной точностью.

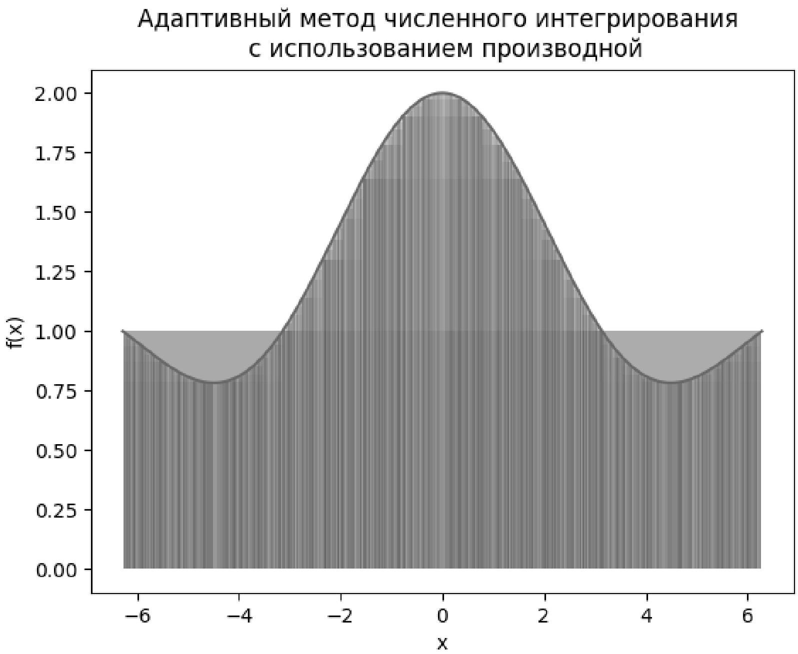

Рисунок 1 - Применение метода для нахождения значения интеграла функции, заданной в качестве первого примера. Авторская разработка.

Пример 2. Функция с точками экстремума(рис.1):

$$f(x) = x^2 \cdot sin(x),\ \text{на интервале } [0, 2\pi]$$

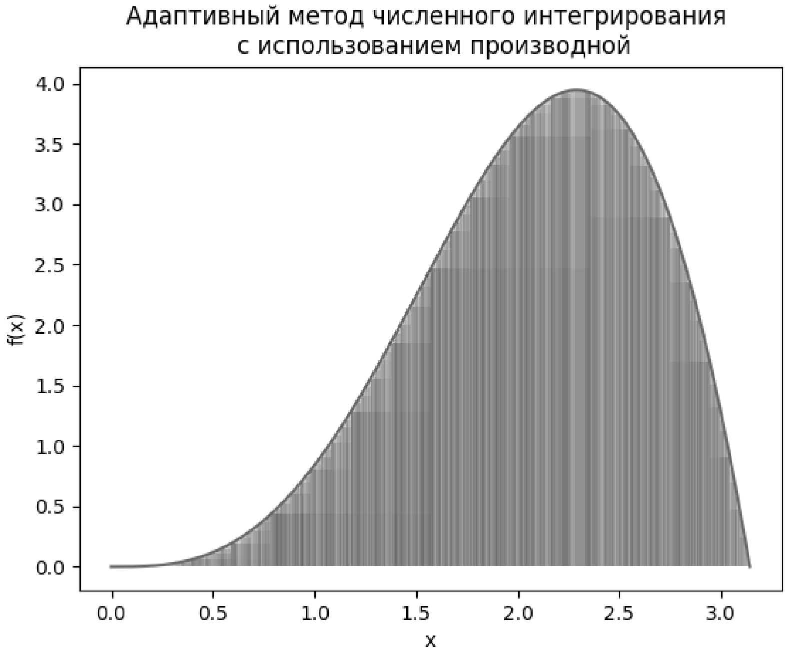

Рисунок 2 - Применение метода для нахождения значения интеграла функции, заданной в качестве второго примера. Авторская разработка.

Здесь метод адаптивно разбивает интервал, увеличивая количество прямоугольников вдали от точек экстремума, где функция быстро изменяет свое значение.

Пример 3. Функция с быстро меняющимися значениями (рис. 3).

$$f(x) = |\,sin(3x)\,|,\ \text{на интервале } [0,\ 2\pi]$$

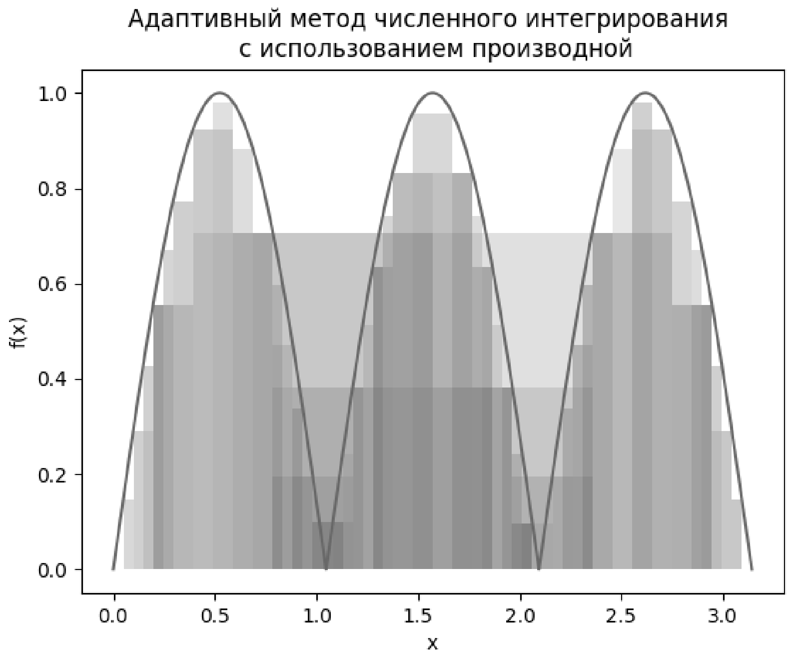

Рисунок 3 - Применение метода для нахождения значения интеграла функции, заданной в качестве третьего примера. Авторская разработка.

В данном примере функция быстро осциллирует и имеет быстро меняющиеся значения. Можно заметить, что метод разбивает интервал, увеличивая количество прямоугольников в областях, где функция быстро изменяет свое значение, чтобы достичь требуемой точности в вычислении интеграла.

Результаты. Адаптивный метод численного интегрирования с использованием производной не уступает классическим методам численного ингтегрирования, может найти применение в различных областях, где требуется точное и эффективное вычисление определенных интегралов [3]. Некоторые потенциальные области применения включают:

- Физические [4] и инженерные задачи [5], требующие вычисления площади под кривыми или плотности вероятности.
- Математическое моделирование [6], где интегрирование используется для решения уравнений и систем уравнений.

- Финансовая аналитика [7], где необходимо вычислять статистические метрики, такие как среднее значение или дисперсия.

Заключение. В данной работе был представлен адаптивный метод численного интегрирования с использованием производной, который позволяет более точно и эффективно вычислять определенные интегралы. Метод основывается на адаптивном разбиении интервала и использовании информации о производной функции. Результаты демонстрации на примерах функций показывают эффективность предложенного метода. Возможное применение метода охватывает широкий спектр областей, требующих точного и эффективного численного интегрирования.

Библиографический список:

1. Корнилов, В. С. История развития вычислительной математики - компонента гуманитарного потенциала обучения численным методам / В. С. Корнилов // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Информатизация образования. – 2010. – № 4. – С. 77-84. – EDN MVSCSD.
2. Махсуд Тулқин Ўғли Усмонов Метод прямоугольников // Science and Education. 2021. №7. – С. 105-112.
3. Федотов, А. А. Проблемы и перспективы развития курса численных методов / А. А. Федотов, П. В. Храпов // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2013. – № 5(17). – С. 15. – EDNRHAKYL.
4. Лобанов, Ю. Ю. Использование метода функционального интегрирования в некоторых задачах математической физики / Ю. Ю. Лобанов // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика, информатика, физика. – 2008. – № 4. – С. 75-83. – EDN JUTFIX.
5. Панасюк Л. Н. Оценка точности прямых методов интегрирования уравнений движения / Л. Н. Панасюк, В. А. Думбай, А. К. Морозова, Д. Р. Ливинский // Инженерный вестник Дона. – 2019. – № 9(60). – С. 29. – EDN OWXYIV.

6. Лапшин, Э. В. Использование методов численного интегрирования в моделях летательных аппаратов / Э. В. Лапшин, В. А. Трусов // Труды международного симпозиума "Надежность и качество". – 2016. – Т. 2. – С. 336-338. – EDN WHWMGF.

7. Мещеряков, Е. А. Экономико-математическое моделирование средствами интегрального исчисления / Е. А. Мещеряков, Е. А. Судоргина, Н. Т. Ховалыг // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. – 2016. – № 7-1. – С. 192-195. – EDN WEZCBF.

Оригинальность 75%