УДК 517.521.7
DOI 10.51691/2541-8327_2023_6_18

ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ СУММ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ РАЗЛИЧНЫМИ МЕТОДАМИ

Скуднева О.В.,
ст. преподаватель
Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана, кафедра «Вычислительная математика и математическая физика»,
Москва, Россия

Аннотация. В статье обобщены основные способы вычисления бесконечных сумм, приведены примеры, даны обоснования применения каждого метода. Представлены краткие исторические сведения. Материалы могут быть интересны студентам, увлекающимся математикой и участвующим в олимпиадах.

Ключевые слова: Ряд, числовой ряд, вычисление суммы ряда, функциональный ряд, сумма функционального ряда.

CALCULATION OF SUMS OF NUMERICAL SERIES.

Skudneva O.V.,
senior lecturer
Bauman Moscow State Technical University,
Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics
Moscow, Russia

Abstract. The article summarizes the main methods of calculating infinite sums, provides examples, and justifications for the use of each method. Brief historical information is presented. The materials may be of interest to students interested in mathematics and participating in Olympiads.

Keywords: Series, numerical series, calculation of the sum of a series, functional series, sum of a functional series.

Введение. Бесконечными суммами ученые интересовались с самых древних времен, задолго до введения самого понятия ряда как одного из центральных понятий математического анализа. Данные задачи часто становились вызовом для математиков. Впоследствии, при построении строгой теории рядов, было введено понятие сходящегося ряда с помощью предела последовательности его частичных сумм. Ввиду сложности непосредственного вычисления сумм для исследования сходимости ряда чаще используются косвенные признаки. Однако задача вычисления суммы ряда остаётся актуальной и интересной, и не теряет своего практического значения.

Краткая историческая справка. Понятие бесконечных сумм фактически было известно ученым Древней Греции (Евдокс, Евклид, Архимед). Нахождение бесконечных сумм являлось составной частью так называемого метода исчерпывания, широко используемого древнегреческими учеными для нахождения площадей фигур, объемов тел, длин кривых и т.д. Так, например, Архимед для вычисления площади параболического сегмента (т.е. фигуры, ограниченной прямой и параболой) нашел сумму бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем 1/4. Идея этого метода состоит в том, чтобы исследуемое тело разбить на счетное число частей, площади или объемы которых известны, а затем эти объемы сложить. Этот метод применяли и Эвклид, и Архимед. Однако, полного и аккуратного обоснования метода в работах античных математиков не было.

Широко пользовались счетными суммами, не уделяя достаточного внимания вопросу о том, что же точно означает это понятие, крупнейшие математики XVII и XVIII веков - Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646-1716), Брук Тейлор (1685-1731), Колин Маклорен (1698-1746), Жозеф Луи Лагранж (1736-1813). Виртуозным мастерством обращения с рядами отмечался Леонард Эйлер (1707-1783), решивший знаменитую Базельскую задачу – вычисление суммы обратных квадратов, а также сумму гармонического ряда и некоторые другие. Ряд, как самостоятельное понятие, математики стали использовать только в XVII в. для решения алгебраических и дифференциальных уравнений. Понятие расходимости гармонического ряда ввёл итальянский ученый Менголи в 1650 г. Степенные ряды появились у Ньютона (1665), который полагал, что степенным рядом можно представить любую функцию. Точная теория рядов начинается с работ Гаусса (1812), Больцано (1817) и, наконец, Коши, где впервые дано современное определение суммы сходящегося ряда и установлены основные теоремы.

Ряды широко используются в математике и ее приложениях, в теоретических исследованиях, криптографии, так и при приближенных численных решениях задач. Многие числа могут быть записаны в виде специальных рядов, с помощью которых удобно вычислять их приближенные значения с нужной точностью. Метод разложения в ряды является эффективным методом изучения функций. Он применяется для вычисления приближенных значений функций, для вычисления и оценок интегралов, для решения всевозможных уравнений (алгебраических, дифференциальных, интегральных).

Вот уже более 25 лет автор данной статьи преподаёт высшую математику в Техническом вузе. Некоторое время назад кафедры математики Университета стали выпускающими, но большинство студентов, по-прежнему, составляют будущие инженеры. За время учёбы они изучают много интересных и важных предметов, но в основе инженерного образования, в фундаменте и на всех уровнях, находится математика. Без математики нет инженера, поэтому главная задача преподавателя - не только вложить в головы студентов определённую, запланированную программой, сумму знаний, но, что не менее важно – пробудить интерес к важнейшей из наук, показать возможности решения задач разными способами, развить способности к мышлению, выработать нестандартные подходы к реализации их идей. В инженерном деле конечный результат – готовое изделие, которое должно безотказно работать, на основе верных принципов и точных расчётов.

В данной статье автор ставит цель показать некоторые задачи на вычисление сумм числовых и функциональных рядов. Готовится к изданию учебно-методическое пособие на данную тему, интересную многим студентам и преподавателям. Цель автора – показать возможности различных математических методов решения задач и пробудить интерес к углублённому изучению раздела математического анализа «Ряды».

Приведём правила и положения, которые будут использованы в наших исследованиях.

Вычисление суммы числового ряда как предела последовательности его частичных сумм. По определению, если существует конечный предел последовательности частичных сумм $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ числового ряда, то ряд называется сходящимся, а число S называется его суммой. Частичные суммы вычисляются по формулам $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3, ..., S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ и образуют числовую последовательность $\{S_n\}$, по значению предела которой можно оценить сумму ряда.

В 1740 году Леонардом Эйлером была получена формула для суммы гармонического ряда – суммы чисел, обратных числам из натурального ряда: $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{N} = \ln N + C_Э + \varepsilon_n$, где $C_Э$ - число, получившее название константы Эйлера, представляет собой бесконечную десятичную дробь 0,577215664… С помощью этой формулы можно вычислять некоторые суммы рядов.[4]

Если все члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ являются функциями не только своего номера n, но и аргумента *x* (аргумент может быть как действительным, так и комплексным), определенными на некоторой области изменения этого аргумента, ряд называется функциональным. При подстановке в функциональный ряд различных значений *x* мы будем получать либо сходящийся, либо расходящийся числовой ряд. Можно определить области изменения аргумента *x*, в каждой точке которых ряд сходится. На множестве равномерной сходимости функционального ряда говорят о сходимости функционального ряда к функции $S(x)$, являющейся пределом последовательности частичных сумм функционального ряда $(S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x))$ и называющейся суммой функционального ряда. В курсах высшей математики технических вузов много внимания уделяют работе с подклассом функциональных рядов – степенным рядам $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Степенные ряды сходятся абсолютно и равномерно внутри интервала $|x-x_0| < R$. Комплексные степенные ряды $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ сходятся внутри круга $|z-z_0| < R$. Радиус сходимости может быть конечным или бесконечным.

Основные свойства степенных рядов.

Если члены степенного ряда являются непрерывными функциями, сам степенной ряд сходится равномерно в любом промежутке, лежащем внутри интервала сходимости, то имеют место следующие утверждения:

1. Сумма степенного ряда является непрерывной функцией внутри интервала сходимости этого ряда.

2. Степенной ряд можно почленно дифференцировать в интервале сходимости, причём сумма нового ряда равна производной суммы исходного.

$$S_1(x) = S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n (x-x_0)^n\right)'.$$

(При этом сходимость на границах интервала может нарушаться.)

3. Степенной ряд можно почленно интегрировать в интервале сходимости. (При этом на границах интервала сходимости получившийся ряд может оказаться сходящимся, в отличие от исходного ряда).

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_a^b a_n\left(x-x_0\right)^n dx\right)=\int_a^b\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n\right)dx=\int_a^b S\left(x\right)dx.$$ [2]

Возможность почленного дифференцирования и интегрирования степенного ряда внутри его интервала сходимости, а также простота степенной функции, делают степенные ряды незаменимыми в теоретических и практических исследованиях.

Обычно при изучении теории рядов студентам технических вузов показывают возможности, связанные с заменой функции соответствующим степенным рядом, такие как вычисление определённых интегралов с заданной точностью, решение дифференциальных уравнений. Мы же рассмотрим задачу в обратном порядке – будем исследовать суммы рядов с помощью вычисления значения функции в точках сходимости ряда, интегрирования и дифференцирования степенного ряда и функции суммы ряда.

Метод Абеля.

Этот метод нахождения сумм числовых рядов основан на утверждении: если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, то $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$. [1]

Вычисление сумм числовых рядов с помощью разложения функций в ряд Фурье.

Ряды Фурье, как и степенные ряды, являются функциональными. Поэтому, при выполнении условий сходимости, ряды Фурье сходятся к функциям, с помощью которых также можно вычислять некоторые суммы числовых рядов.

Для исследования нам понадобится разложение функции $y = sign(x)$ в ряд Фурье в интервале $(-\pi, \pi)$. Таким образом, значение функции при отрицательных значениях аргумента равно минус один, а при положительных – плюс один, функция является нечётной и разлагается по синусам кратных дуг по формуле: $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx),\ \ b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$. В результате вычислений получим: $sign(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$. При подстановке в обе части равенства различных значений переменной x из интервала $(-\pi, \pi)$ имеем:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = \frac{\pi}{4} sign(x)$, что на первый взгляд может показаться парадоксальным. Однако вычисление данной суммы другими способами подтвердит наши выводы.

По ещё одной формуле Эйлера для комплексных чисел, принадлежащих единичной окружности [3], имеем: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. В соответствии с этой формулой из двух действительных функциональных рядов мы можем составить комплексную линейную комбинацию: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1} + i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i(2n-1)x}}{2n-1}$, и принять $z = e^{ix}, x \in (0, 2\pi)$. Тогда имеем комплекснозначный степенной ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n-1}}{2n-1}$, сходящийся в круге $|z| < 1$. Нетрудно заметить, что этот ряд есть результат почленного интегрирования другого степенного ряда, а именно суммы бесконечной геометрической прогрессии:

$\frac{1}{1-z^2} = 1 + z^2 + z^4 + z^6 + \cdots + z^{2n} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n},\ |z| < 1$. Проинтегрируем функцию суммы и, почленно, сам ряд:

$$\int_0^z \frac{1}{1-z^2}dz = \int_0^z (1+z^2+z^4+z^6+\dots+z^{2n}+\dots)dz = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^z z^{2n}dz\right) =$$

$$= z+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\dots+\frac{z^{2n-1}}{2n-1}+\dots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n-1}}{2n-1} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}$$

Таким образом, мы выяснили, что наш ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n-1}}{2n-1}$ сходится к функции $S(z)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}$. Теперь, с помощью обратной подстановки, выделим действительную и мнимую часть данной функции. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}$, как действительная часть ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n-1}}{2n-1}$, будет сходиться к действительной части функции $S(z)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$, как мнимая часть ряда, будет сходиться к мнимой части функции суммы ряда.

Так как $\ln z^* = \ln\left|z^*\right| + i\arg z^*$, $\quad z^* = 1-e^{ix} = 1-(\cos x + i\sin x) = (1-\cos x)+i(-\sin x)$, то

$$\left|z^*\right| = \sqrt{(1-\cos x)^2+(-\sin x)^2} = 2\left|\sin\frac{x}{2}\right|,$$

$$\arg z^* = arctg\frac{-\sin x}{1-\cos x} = -arctg\left(ctg\frac{x}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}+arcctg\left(ctg\frac{x}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}$$

Аналогично, $z^{**} = 1+e^{ix} = 1+(\cos x + i\sin x) = (1+\cos x)+i(\sin x)$,

$$\left|z^{**}\right| = \sqrt{(1+\cos x)^2+(\sin x)^2} = 2\left|\cos\frac{x}{2}\right|,\ \arg z^{**} = arctg\frac{\sin x}{1+\cos x} = arctg\left(tg\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}$$

Тогда: $$\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z} = \frac{1}{2}\left[\ln(2\left|\cos\frac{x}{2}\right|) - \ln(2\left|\sin\frac{x}{2}\right|) + i\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\ln\left(ctg(\frac{x}{2})\right)+i\frac{\pi}{4}.$$

Соответственно, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1} = \frac{1}{2}\ln\left(ctg(\frac{x}{2})\right)$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = \frac{\pi}{4}sign(x)$

При этом $|x|<\pi$, иначе логарифм не определён. Результат, полученный с помощью ряда Фурье, подтверждён.

Проверим наши выводы. Вычислим сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$ при $x=\frac{\pi}{4}$. При подстановке получим числовой ряд $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}\ldots\right)$. Чтобы вычислить данную сумму, сначала выполним группировку членов, а потом применим метод Абеля. Итак,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}\ldots\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(1-\frac{1}{5}+\frac{1}{9}-\frac{1}{13}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\frac{1}{11}-\frac{1}{15}+\ldots\right)\right)$$

Ряды в обоих скобках сходятся, поэтому, по методу Абеля $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{x\to1-0}\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$.

Ряд в первой скобке можно рассмотреть как степенной ряд $x-\frac{x^5}{5}+\frac{x^9}{9}-\frac{x^{13}}{13}+\ldots$ при $x=1$, который, в свою очередь, может быть получен как результат почленного интегрирования степенного ряда $1-x^4+x^8-x^{12}+\cdots$, сходящегося к функции $1-x^4+x^8-x^{12}+\cdots=\frac{1}{1+x^4}$. По второй скобке рассуждаем аналогично:

$\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\frac{1}{11}-\frac{1}{15}+\ldots$ рассматриваем как степенной ряд $\frac{x^3}{3}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^{11}}{11}-\frac{x^{15}}{15}+\ldots$ при $x=1$, который, в свою очередь, может быть получен как результат почленного интегрирования степенного ряда $x^2-x^6+x^{10}-x^{14}+\cdots$, сходящегося к функции $x^2-x^6+x^{10}-x^{14}+\cdots=\frac{x^2}{1+x^4}$. Общая функция суммы ряда до интегрирования имеет вид $\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1+x^2}{1+x^4}$. Проинтегрируем эту функцию:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^x \frac{1+t^2}{1+t^4}dt = \int_0^x \frac{1+\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t^2}+t^2}dt = \left| \begin{array}{l} \left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt = d\left(t-\frac{1}{t}\right) \\ \frac{1}{t^2}+t^2 = \left(t-\frac{1}{t}\right)^2+2 \end{array} \right| = \frac{1}{2}arctg\left(\frac{\left(t-\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{2}}\right)\Bigg|_0^x = \frac{1}{2}arctg\left(\frac{\left(x^2-1\right)}{\sqrt{2}x}\right)+\frac{\pi}{4}$$

К данной функции сходится степенной ряд, который мы применяем по методу Абеля: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \frac{1}{2}arctg\left(\frac{\left(x^2-1\right)}{\sqrt{2}x}\right)+\frac{\pi}{4}$

Окончательно, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{x\to 1-0}\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n =$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}\dots\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(1-\frac{1}{5}+\frac{1}{9}-\frac{1}{13}+\dots\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\frac{1}{11}-\frac{1}{15}+\dots\right)\right)=$$

$=\lim_{x\to 1-0}\left(\frac{1}{2}arctg\left(\frac{\left(x^2-1\right)}{\sqrt{2}x}\right)+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$, что и требовалось доказать.

В результате аналогичных действий можно вычислить двумя способами сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}$ при $x=\frac{\pi}{4}$. В соответствии с полученной формулой

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos[(2n-1)\frac{\pi}{4}]}{2n-1}=\frac{1}{2}\ln\left(ctg(\frac{\pi}{8})\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$$

По методу Абеля при $x=\frac{\pi}{4}$ получаем числовой ряд $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+\frac{1}{15}\dots\right)$, который при $x=1$ можно рассмотреть как степенной ряд, сходящийся к функции $S(x)=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right)$,

$$\frac{1}{4}\lim_{x\to 1-0}\ln\left(\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$$

В завершении вычислим сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}$ при $x=\frac{\pi}{3}$ и сделаем проверку с помощью группировки членов в формуле частичной суммы ряда и формулы Эйлера для вычисления суммы первых членов гармонического ряда. как в данной формуле значение суммы зависит от порядкового номера последнего слагаемого, необходимо учитывать число слагаемых в выражении для частичной суммы исследуемого ряда.

Итак, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos[(2n-1)\frac{\pi}{3}]}{2n-1}=\frac{1}{2}\ln\left(ctg(\frac{\pi}{6})\right)=\frac{1}{4}\ln(3)$. При подстановке $x=\frac{\pi}{3}$ ряд примет вид $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}\dots\right)-\frac{1}{3}-\frac{1}{9}-\frac{1}{15}-...$

Внимательно рассмотрим предложенный ряд и, для начала, оценим, как можно сгруппировать его члены. Чтобы вычислить сумму этого ряда, дополним сначала первую скобку всеми недостающими нечётными гармониками и тут же вычтем их, а из полученной правой части суммы вынесем за скобку общий множитель $\frac{1}{3}$. При этом важно рассматривать именно конечную, частичную сумму ряда с учетом индексов элементов. Получается, что в каждой малой группе по три элемента, зависящих от одного номера:

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}+\frac{1}{17}\dots\right)-\frac{3}{2\cdot3}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+...\right)=$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6\cdot0+1}+\frac{1}{6\cdot0+3}+\frac{1}{6\cdot0+5}+\frac{1}{6\cdot1+1}+\frac{1}{6\cdot1+3}+\frac{1}{6\cdot1+5}+\dots+\frac{1}{6\cdot n+1}+\frac{1}{6\cdot n+3}+\frac{1}{6\cdot n+5}\right)-$$
$$-\frac{3}{2\cdot3}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2\cdot n+1}\right)$$

Теперь дополним обе суммы нечётных гармоник чётными, и тут же вычтем их, чтобы не нарушать равенства. Применим формулу Эйлера и получим ответ:

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{6n+5}+\frac{1}{6n+6}\right)-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{3n+3}\right)-$$
$$-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}\right)+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n+1}\right)=$$
$$\approx\frac{1}{2}\ln\left(6(n+1)\right)-\frac{\ln\left(3(n+1)\right)+2\ln\left(2(n+1)\right)-\ln(n+1)}{4}=\frac{\ln 3}{4}$$

Вычисления разными способами суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$ при $x=\frac{\pi}{3}$ при желании предлагается выполнить самостоятельно.

Таким образом, в данной статье рассмотрены несколько задач, представляющих интерес для изучающих ряды, позволяющие лучше понять структуру числовых и функциональных рядов, взаимосвязи используемых для исследования рядов методов.

Библиографический список

1. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Математический анализ в задачах и упражнениях (числовые и функциональные ряды). Факториал, 1996, 447 с.
2. Дубограй И.В., Дьякова Л.Н., Скуднева О.В. Степенные ряды. Методические указания. -М.: Изд. МГТУ, 2005 .57 с.
3. Ефимов А.В., Демидович Б.П. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Ч. 2. Специальные разделы математического анализа М.: ООО "Издательский дом Альянс", 2010. - 368 с. - ISBN: 978-5-903034-90-1, 6-е издание, стереотипное. Перепечатка третьего издания 1995 г.
4. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Том 2. – М.:Наука,1968, 464 с.

Оригинальность 78%