УДК 512.552

DOI 10.51691/2541-8327_2023_4_23

СТАНДАРТНОЕ ТОЖДЕСТВО ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ В АЛГЕБРАХ ГЕККЕ ГРУПП ДИЭДРА

Киреева Е.А.

кандидат физико-математических наук, доцент

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана

(национальный исследовательский университет)

Москва, Россия

Щиголев В.В.

доктор физико-математических наук, профессор

*Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации***,**

Москва, Россия

Аннотация

В работе изучаются алгебры Гекке группы диэдра с точки зрения выполнения в них полиномиальных тождеств. Алгебры Гекке произвольных групп Кокстера и групп диэдра, в частности, представляет собой важный объект теории представлений. Мы рассматриваем наиболее простой случай алгебры Гекке H_n для группы диэдра, состоящей из n элементов (включая случай $n = \infty$). Уже этот частный случай играет решающую роль при доказательстве категорификационной теоремы для алгебр Гекке. С другой стороны, алгебры H_n интенсивно изучались с точки зрения изоморфизма с групповыми алгебрами, структурной теории и полиномиальных тождеств. В частности, авторами этой статьи было доказано, что любая алгебра H_n удовлетворяет стандартному тождеству степени 4. В данной статье доказывается, что некоторый свободный подмодуль алгебры H_n ранга $[(n-2)/4]+2$ удовлетворяет стандартному тождеству степени 3.

Ключевые слова: Группа Кокстера, группа диэдра, алгебра Гекке, полиномиальное тождество, стандартное тождество.

STANDARD IDENTITY OF ORDER THREE FOR THE HECKE ALGEBRAS OF THE DIHEDRAL GROUPS

Kireeva E.A.

PhD, Associate Professor,

Bauman Moscow State Technical University

Moscow, Russia

Shchigolev V.V.

PhD, Professor,

Financial University under the Government of the Russian Federation,

Moscow, Russia

Abstract

In this article, we study the Hecke algebras of the dihedral group from the polynomial identity point of view. The Hecke algebras of arbitrary Coxeter groups and dihedral groups in particular are important objects in the representation theory. We consider the simplest case of the Hecke algebra H_n for the dihedral group consisting of n elements (including the case $n=\infty$). Even this particular case plays a decisive role in the proof of the categorification theorem for the Hecke algebras. On the other hand, the algebras H_n have been intensively studied from the point of view of the isomorphism with the group algebras, the structure theory, and the polynomial identities. In particular, the authors of this article proved that any algebra H_n satisfies the standard identity of order 4. In this article, we prove that some free submodule of H_n of rank $[(n-2)/4]+2$ satisfies the standard identity of order 3.

Keywords: Coxeter group, Dihedral group, Hecke algebra, polynomial identity, standard identity.

1. Введение

Для каждого чётного натурального числа n через D_n обозначим группу диэдра, состоящую из n элементов. Кроме того, мы будем рассматривать счётную бесконечную группу диэдра D_∞. Эти группы имеют следующие представления через порождающие и соотношения

$$D_n = \langle s, t \mid s^2 = t^2 = 1, (st)^{n/2} = 1\rangle,$$

для конечного n и

$$D_\infty = \langle s, t \mid s^2 = t^2 = 1\rangle.$$

Такое определение доказывает, что любая группа D_n является группой Кокстера. Поэтому мы можем рассмотреть алгебру Гекке этой группы:

$$H_n = \bigoplus_{x\in D_n} \mathbb{Z}[v, v^{-1}]T_x.$$

Чтобы задать на этом свободном $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$-модуле структуру ассоциативного кольца, достаточно определить правило умножения для базисных элементов T_x. Это правило имеет следующий вид:

- $T_x^2 = v^{-2}T_e + (v^{-2} - 1)T_x$, если $\ell(x) = 1$;
- $T_x T_y = T_{xy}$, если $\ell(x) + \ell(y) = \ell(xy)$.

Здесь и далее $\ell(x)$ равно количеству порождающих s и t в любом приведённом представлении (то есть минимальной возможной длинны) элемента $x \in D_n$. Это число называется *длинной* элемента x.

Алгебры Гекке групп диэдра важны при исследовании алгебр Гекке произвольных групп Кокстера. Например, В. Зёргель рассматривал частный случай группы диэдра в своём доказательстве теоремы категорификации для алгебр Гекке с помощью бимодулей над кольцами многочленов, см. [4, §4]. С другой стороны, алгебры Гекке групп диэдра интересны сами по себе [2], [3].

Мы рассматриваем в этой статье алгебры Гекке H_n с точки зрения колец с полиномиальными тождествами. Более точно, пусть $f(x_1, \dots, x_m)$ — целочисленный многочлен от некоммутирующих переменных $x_1, \dots, x_m$. Для произвольных элементов $r_1, \dots, r_m \in R$ результат действия подстановки $x_1 \mapsto r_1, \dots, x_m \mapsto r_m$ на этот многочлен обозначается через $f(r_1, \dots, r_m)$. Подмножество S кольца R *удовлетворяет тождеству* $f \equiv 0$, если $f(s_1, \dots, s_m) = 0$ для любых $s_1, \dots, s_m \in S$.

В качестве основного примера полиномиальных тождеств мы рассмотрим *стандартное* тождество порядка m:

$$\mathrm{St}_m(x_1, \cdots, x_m) = \sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sgn} \sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(m)},$$

где S_m — симметрическая группа порядка m, а $\operatorname{sgn}: S_m \to \{-1,1\}$ — функция знака.

В статье [1] авторами было доказано, что любая алгебра Гекке H_n удовлетворяет тождеству $\mathrm{St}_4 \equiv 0$. При этом возникает гипотеза, что достаточно большая часть этой алгебры может удовлетворять стандартным тождествам меньшего порядка. В связи с нею мы определяем подмодуль

$$H_n^y = \mathbb{Z}[v, v^{-1}]T_e \;\oplus \bigoplus_{\substack{x \in D_n, \ell(x) \text{нечётная} \\ \ell(yx) < \ell(x)}} \mathbb{Z}[v, v^{-1}]T_x$$

алгебры H_n для $y = s$ или $y = t$. Его ранг равен $[(n-2)/4] + 2$. Основной целью этой статьи является доказательство следующего утверждения.

Теорема 1. *Подмодуль* H_n^y *удовлетворяет тождеству* $\mathrm{St}_3 \equiv 0$.

Статья организована следующим образом. Леммы 1 и 2 и следствие 3 устанавливают коммутационные соотношения между порождающей T_s и следующими элементами алгебры H_n:

$$T_{s,k} = T_{stst\cdots}, \quad T_{t,k} = T_{tsts\cdots},$$

где произведения $stst\cdots$ и $tsts\cdots$ содержат k множителей. Затем мы доказываем теорему 1.

2. Стандартное тождество порядка 3

Для любого $k \geq 2$ мы получаем $T_{s,k} = T_s T_{t,k-1}$ и $T_{t,k} = T_t T_{s,k-1}$, а также

$$T_{s,k} = \begin{cases} T_{s,k-1}T_s, & \text{если } k \text{ нечётное} \\ T_{s,k-1}T_t, & \text{если } k \text{ чётное} \end{cases} \qquad T_{t,k} = \begin{cases} T_{t,k-1}T_t, & \text{если } k \text{ нечётное} \\ T_{t,k-1}T_s, & \text{если } k \text{ чётное} \end{cases}$$

Мы будем использовать эти соотношения без дальнейшей ссылки на них. Так же мы будем использовать сокращения $\alpha = v^{-2}$ и $\beta = v^{-2} - 1$.

Лемма 1. *Пусть* k *и* m *— нечётные числа такие, что* $0 < k < m$. *Тогда*

$$[T_{s,k}, T_{s,m}] = \alpha^k [T_{t,m-k-1}, T_s].$$

Доказательство. Заметим, что $m \geq 3$ и докажем лемму индукцией по нечётному k. Для $k = 1$ мы получаем

$$[T_s, T_{s,m}] = T_s^2 T_{t,m-1} - T_{s,m-1} T_s^2 = (\alpha T_e + \beta T_s) T_{t,m-1} - T_{s,m-1}(\alpha T_e + \beta T_s) =$$
$$= \alpha(T_{t,m-1} - T_{s,m-1}) = \alpha(T_{t,m-2}T_s - T_s T_{t,m-2}) = \alpha[T_{t,m-2}, T_s].$$

Теперь предположим, что $m > k + 2$ и что лемма доказана для k. Мы получаем

$$[T_{s,k+2}, T_{s,m}] = T_{s,k+1} T_s^2 T_{t,m-1} - T_{s,m-1} T_s^2 T_{t,k+1} = T_{s,k+1}(\alpha T_e + \beta T_s) T_{t,m-1}$$
$$- T_{s,m-1}(\alpha T_e + \beta T_s) T_{t,k+1} = \alpha(T_{s,k} T_t^2 T_{s,m-2} - T_{s,m-2} T_t^2 T_{s,k}) =$$
$$= \alpha(T_{s,k}(\alpha T_e + \beta T_t) T_{s,m-2} - T_{s,m-2}(\alpha T_e + \beta T_t) T_{s,k}) = \alpha^2 (T_{s,k} T_{s,m-2} - T_{s,m-2} T_{s,k})$$
$$= \alpha^2 [T_{s,k}, T_{s,m-2}] = \alpha^{k+2} [T_{t,m-k-3}, T_s].$$

☐

Для любого ненулевого целого числа i мы будем использовать следующее обозначение:

$$\varepsilon_i = \begin{cases} v^i\, T_{s,i}, & \text{если } i > 0; \\ v^{-i}\, T_{t,-i}, & \text{если } i < 0. \end{cases}$$

Лемма 2. *Пусть k и m — нечётные положительные числа. Тогда*

$$[T_{t,m}, T_s]T_{s,k} = v^{-k-m-1}\varepsilon_{k-m-1} + \alpha^{\frac{k+m}{2}}\beta \sum_{i=\frac{|k-m-1|}{2}+\frac{1}{2}}^{\frac{k+m}{2}} \alpha^{-i}\, T_{t,2i} - v^{-k-m-1}\varepsilon_{k+m+1}.$$

Доказательство. Случай 1: k=m. Мы докажем требуемую формулу индукцией по k. Случай $k = 1$ следует непосредственно из определяющих соотношений алгебры H_n. Теперь предположим, что лемма доказана для некоторого нечётного $k > 0$. Мы получаем

$$\begin{gathered}
[T_{t,k+2,}T_s]T_{s,k+2} = T_{t,k+2}T_s^2T_{t,k+1} - T_{s,2k+5} = T_{t,k+2}(\alpha\, T_e + \beta\, T_s)T_{t,k+1} - T_{s,2k+5} = \\
= \alpha T_{t,k+1}T_t^2T_{s,k} + \beta T_{t,2k+4} - T_{s,2k+5} = \alpha T_{t,k+1}(\alpha\, T_e + \beta\, T_t)T_{s,k} + \beta T_{t,2k+4} - T_{s,2k+5} = \\
= \alpha^2 T_{t,k+1}T_{s,k} + \alpha\beta T_{t,2k+2} + \beta T_{t,2k+4} - T_{s,2k+5} = \alpha^2[T_{t,k}, T_s]T_{s,k} + \alpha^2 T_{s,2k+1} + \\
+\alpha\beta T_{t,2k+2} + \beta T_{t,2k+4} - T_{s,2k+5} = \alpha^2\left(\alpha^k T_t + \alpha^k\beta \sum_{i=1}^{k} \alpha^{-i}\, T_{t,2i}\right) + \\
+\alpha\beta T_{t,2k+2} + \beta T_{t,2k+4} - T_{s,2k+5} = \alpha^{k+2}T_t + \alpha^{k+2}\beta \sum_{i=1}^{k+2} \alpha^{-i}\, T_{t,2i} - T_{s,2k+5}.
\end{gathered}$$

Случай 2: $m \geq k$. Зафиксируем k и докажем лемму индукцией по нечётному $m \geq k$. Случай $m = k$ совпадает с уже рассмотренным случаем 1. Теперь предположим, что лемма доказана для некоторого $m \geq k$. Тогда мы получаем

$$[T_{t,m+2}, T_s]T_{s,k} = T_t T_s [T_{t,m}, T_s] T_{s,k} + T_t T_s^2 T_{t,m} T_{s,k} - T_{s,m+k+3} =$$

$$= T_t T_s \left(\alpha^k T_{t,m-k+1} + \alpha^{\frac{m+k}{2}} \beta \sum_{i=\frac{m-k}{2}+1}^{\frac{m+k}{2}} \alpha^{-i}\, T_{t,2i} - T_{s,m+k+1} \right) + T_t T_s^2 T_{t,m+k} - T_{s,m+k+3} =$$

$$= \alpha^k T_{t,m-k+3} + \alpha^{\frac{m+k}{2}} \beta \sum_{i=\frac{m-k}{2}+1}^{\frac{m+k}{2}} \alpha^{-i}\, T_{t,2i+2} - T_{s,m+k+3} =$$

$$= \alpha^k T_{t,m-k+3} + \alpha^{\frac{m+2+k}{2}} \beta \sum_{i=\frac{m+2-k}{2}+1}^{\frac{m+2+k}{2}} \alpha^{-i}\, T_{t,2i} - T_{s,m+k+3}.$$

Случай 3: $m < k$. Зафиксируем m и докажем лемму индукцией по нечётному $k > m$. Сначала рассмотрим случай $k = m + 2$. Согласно случаю 1, мы получаем

$$[T_{t,m}, T_s]T_{s,m+2} = [T_{t,m}, T_s]T_{s,m}T_{t,2} = \left(\alpha^m T_t + \alpha^m \beta \sum_{i=1}^{m} \alpha^{-i}\, T_{t,2i} - T_{s,2m+1} \right) T_{t,2} =$$

$$= \alpha^m T_t^2 T_s + \alpha^m \beta \sum_{i=1}^{m} \alpha^{-i}\, T_{t,2i+2} - T_{s,2m+3} =$$

$$= \alpha^m (\alpha\, T_e + \beta\, T_t) T_s + \alpha^m \beta \sum_{i=1}^{m} \alpha^{-i}\, T_{t,2i+2} - T_{s,2m+3} = \alpha^{m+1} T_s + \alpha^m \beta\, T_{t,2} +$$

$$+ \alpha^m \beta \sum_{i=1}^{m} \alpha^{-i}\, T_{t,2(i+1)} - T_{s,2m+3} = \alpha^{m+1} T_s + \alpha^{m+1} \beta \sum_{i=1}^{m+1} \alpha^{-i}\, T_{t,2i} - T_{s,2m+3}.$$

Теперь предположим, что лемма доказана для некоторого нечётного $k > m$. Мы получаем

$$[T_{t,m}, T_s]T_{s,k+2} = [T_{t,m}, T_s]T_{s,k}T_{t,2} = \left(\alpha^{m+1} T_{s,k-m-1} + \alpha^{\frac{k+m}{2}} \beta \sum_{i=\frac{k-m}{2}}^{\frac{k+m}{2}} \alpha^{-i}\, T_{t,2i} - T_{s,k+m+1} \right) T_{t,2}$$

$$= \alpha^{m+1} T_{s,k-m-1+2} + \alpha^{\frac{k+m}{2}+1} \beta \sum_{i=\frac{k-m}{2}+1}^{\frac{k+m}{2}+1} \alpha^{-i}\, T_{t,2i} - T_{s,(k+2)+m+1}.$$

□

Следствие 1. *Пусть* k, m, q — *положительные нечётные числа такие, что* $k < m$. *Тогда*

$$[T_{s,k}, T_{s,m}]T_{s,q} = v^{-m-k-q}\varepsilon_{q-m+k} + v^{-q-m-k+1}\beta \sum_{i=\frac{|q-m+k|}{2}+\frac{1}{2}}^{\frac{q+m-k-1}{2}} \alpha^{-i}\, T_{t,2i} - v^{-m-k-q}\varepsilon_{q+m-k}.$$

Доказательство. Результат следует из лемм 1 и 2. ∎

Доказательство теоремы 1. Так как для любого n алгебра H_n^y является гомоморфным образом алгебры H_∞^y и тождество St_3 линейно по каждому аргументу, то без потери общности мы будем считать, что $n = \infty$, $y = s$, $a = T_{s,k}, b = T_{s,m}, c = T_{s,q}$. Из следствия 1, мы получаем

$$\begin{aligned}
\mathrm{St}_3(a,b,c) &= [T_{s,k}, T_{s,m}]T_{s,q} - [T_{s,k}, T_{s,q}]T_{s,m} + [T_{s,m}, T_{s,q}]T_{s,k} \\
&= v^{-m-k-q}\varepsilon_{q-m+k} + v^{-q-m-k+1}\beta \sum_{i=\frac{|q-m+k|}{2}+\frac{1}{2}}^{\frac{q+m-k-1}{2}} \alpha^{-i}\, T_{t,2i} - v^{-m-k-q}\varepsilon_{q+m-k} \\
&- \left(v^{-m-k-q}\varepsilon_{m-q+k} + v^{-q-m-k+1}\beta \sum_{i=\frac{|m-q+k|}{2}+\frac{1}{2}}^{\frac{m+q-k-1}{2}} \alpha^{-i}\, T_{t,2i} - v^{-m-k-q}\varepsilon_{m+q-k} \right) \\
&+ v^{-m-k-q}\varepsilon_{k-q+m} + v^{-q-m-k+1}\beta \sum_{i=\frac{|k-q+m|}{2}+\frac{1}{2}}^{\frac{k+q-m-1}{2}} \alpha^{-i}\, T_{t,2i} - v^{-m-k-q}\varepsilon_{k+q-m} = \\
& v^{-q-m-k+1}\beta \left(- \sum_{i=\frac{|m-q+k|}{2}+\frac{1}{2}}^{\frac{m+q-k-1}{2}} \alpha^{-i}\, T_{t,2i} + \sum_{i=\frac{|k-q+m|}{2}+\frac{1}{2}}^{\frac{k+q-m}{2}-\frac{1}{2}} \alpha^{-i}\, T_{t,2i} + \sum_{i=\frac{k+q-m}{2}+\frac{1}{2}}^{\frac{q+m-k-1}{2}} \alpha^{-i}\, T_{t,2i} \right) \\
&= v^{-q-m-k+1}\beta \left(- \sum_{i=\frac{|m-q+k|}{2}+\frac{1}{2}}^{\frac{m+q-k-1}{2}} \alpha^{-i}\, T_{t,2i} + \sum_{i=\frac{|k-q+m|}{2}+\frac{1}{2}}^{\frac{q+m-k-1}{2}} \alpha^{-i}\, T_{t,2i} \right) = 0.
\end{aligned}$$

∎

3. Заключение

Алгебры Гекке представляют собой важный класс ассоциативных алгебр. Важно изучить их структурные свойства и выполнение в них полиномиальных тождеств, особенно в случае их не изоморфности групповым алгебрам.

4. Библиографический список

[1] Киреева Е.А., Щиголев В.В. Стандартные тождества алгебр Гекке групп диэдра // Дневник науки. 2022. №11

[2] Fakiolas A.P. The Lusztig lsomorphism for Hecke Algebras of Dihedral Type // J. Algebra, v. 126, 1989, P. 466–492.

[3] Okun B., Scott R. The Atiyah conjecture for the Hecke algebra of the infinite dihedral group // Groups Geom. Dyn. v. 8, №4, 2014, P. 1161–1194.

[4] Soergel W. Kazhdan-Lusztig Polynome und unzerlegbare Bimoduln über Polynomringen // J. Inst. Math. Jussieu, v. 6 , № 3, July 2007, P. 501–525.

Оригинальность 75%