УДК 512.642

ПРИМЕР ИЗБЫТОЧНОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ ТИПА 2+

Абдуллин С.Р.
ст. преподаватель,
Московский государственный технический
университет им. Н.Э.Баумана
Москва, Россия
Дубровин В.М.
доцент ,к.т.н.,
Московский государственный технический
университет им. Н.Э.Баумана
Москва, Россия
Лебедев С.В.
доцент, к. ф.-м.н,
Московский государственный технический
университет им. Н.Э.Баумана
Москва, Россия

Аннотация.
В работе рассматривается избыточная система координат, дополненная двумя векторами к исходному базису. Полученная координатная система называется псевдобазисом. При этом на новые координаты накладываются дополнительные линейные условия. Рассматриваются варианты задания этих условий, при которых разложение произвольного вектора по псевдобазису существует и единственно.

Ключевые слова: Линейное n-мерное пространство, базис, линейная независимость, избыточная система координат, псевдобазис.

AN EXAMPLE OF A REDUNDANT COORDINATE SYSTEM OF TYPE 2+ IS

Abdullin S.R.

senior lecturer,

Bauman Moscow State Technical University

Moscow, Russia

Dubrovin V.M.

Associate Professor, Candidate of Technical Sciences,

Bauman Moscow State Technical University

Moscow, Russia

Lebedev S.V.

Associate Professor, Ph.D.,

Bauman Moscow State Technical University

Moscow, Russia

Annotation.

The paper considers a redundant coordinate system supplemented by two vectors to the original basis. The resulting coordinate system is called a pseudobase. At the same time, additional linear conditions are imposed on the new coordinates. Variants of setting these conditions are considered, under which the decomposition of an arbitrary vector by a pseudobase exists and is unique.

Keywords: Linear n-dimensional space, basis, linear independence, redundant coordinate system, pseudobase.

При решении задач линейной алгебры может возникать ситуация, когда координаты линейного объекта необходимо представлять в некотором стандартном виде, или, по-другому, эти координаты должны удовлетворять некоторым дополнительным условиям.

Будем предполагать, что дополнительные условия на координаты задаются линенйными однородными формами [1].

Примерно такие обстоятельства возникают в задачах линейного программирования (ЗЛП) при расчётах симплекс-таблиц [3], для приведения ЗЛП к стандартной форме в виде уравнений с равенствами.

Кроме того, базис, увеличенный на один вектор, появляется также в барицентрической системе координат [2] при решении задач по элементарной геометрии.

Допустим, что таких дополнительных условий будет два. Тогда придётся увеличить число координат на число этих условий, т.е. тоже на две координаты. Значит, мы должны добавить к исходному базису **E={ e₁ , e₂ }** [1] ещё два вектора $\boldsymbol{f_1}$ и $\boldsymbol{f_2}$, совокупность которых обозначим через **F** . Понятно, что при этом система векторов **E+F** не будет линейно – независимой [1] Назовём совокупность этих векторов термином ***псевдобазис***.

На примере исходного 2-мерного пространства рассмотрим постановку задачи о построении ***избыточной системы координат*** типа 2+.

Замечание 1

Векторы –столбцы будем записывать в строчку

Именно, исходный базис e_1 , e_2 в координатном виде [1]

$$\boldsymbol{e_1} = \{1;0\} \quad \boldsymbol{e_2} = \{0;1\} \qquad (1)$$

Дополнительные векторы возьмём, например, в виде

$$\boldsymbol{f_1} = \{1;h\} \quad \boldsymbol{f_2} = \{1;p\} \qquad (2)$$

где h, p некоторые параметры

Во избежание неоднозначности получения избыточных координат или, что то же самое, координат псевдобазиса, необходимо потребовать, чтобы дополнительные векторы $\boldsymbol{f_1}$ и $\boldsymbol{f_2}$ были попарно линейно независимы [1], что выражается в том, что соответствующие определители из коэффициентов векторов отличны от нуля. Сформулируем это в виде Леммы 1.

Зададимся ещё одним вектором – для примера -, попарно линейно-независимым с имеющимся псевдобазисом $\mathbf{E_{+2}} = \mathbf{E+F}$

Замечание 2

Вышеобозначенное условие не является обязательным ни для существования, ни для единственности решения нижеследующей СЛАУ, решение которой, - разложение вектора $\boldsymbol{g}$ в псевдобазисе **E**$_{+2}$

Рассмотрим, вектор $\boldsymbol{g}$ = {u;v}

Запишем его разложение по псевдобазису:

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 f_1 + x_4 f_2 = \boldsymbol{g} \qquad (3)$$

Введём два линейных условия на координаты псевдобазиса:

$$x_1 + a_1 x_2 + b_1 x_3 + c_1 x_4 = 0 \qquad (4)$$

$$x_1 + a_2 x_2 + b_2 x_3 + c_2 x_4 = 0 \qquad (5)$$

Замечание 3

в целях удобства выражения зависимостей переменных вместо записи координат псевдобазиса как x_3 и x_4 будем использовать параметры $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{s}$, т.е.

$$x_3 = \boldsymbol{r}\ ;\ \ x_4 = \boldsymbol{s} \qquad (6)$$

Запишем покоординатно векторное равенство (3):

$$x_1 + \qquad r + s = \mathrm{u} \qquad (7)$$

$$x_2 + h\, r - ps = \mathrm{v} \qquad (8)$$

Перепишем динейные условия (4), (5)

$$x_1 + a_1 x_2 + b_1 r + c_1 s = 0 \qquad (9)$$

$$x_1 + a_2 x_2 + b_2 r + c_2 s = 0 \qquad (10)$$

где a_1 , b_1 , c_1 , a_2, b_2, c_2 – параметры, задающие дополнительные линейгные условия на координаты псевдобазиса **E**$_{+2}$

Итак, имеет место следующая

Лемма 1

Решение СЛАУ (система линейных алгебраических уравнений) [1]

(3), (4), (5) с неизвестными $\boldsymbol{x_1}$ **,** $\boldsymbol{x_2}$ **,** $\boldsymbol{x_3}$ **,**$\boldsymbol{x_4}$, если оно существует, - будет единственным, если дополнительные векторы $\boldsymbol{f_1}$ и $\boldsymbol{f_2}$ попарно линейно независимы [1] как с векторами базиса **E** , так и между собой. Очевидно, это условие выражается в данном примере в том, что соответствующие пять определителей отличны от нуля.

<u>Доказательство</u> (от противного)

Предположим, что некоторая пара векторов линейно зависима. Не ограничивая общности, пусть это будут векторы $\boldsymbol{e_1}$ и $\boldsymbol{f_1}$, и, в разложении (3) по векторам псевдобазиса им соответствуют коэффициенты (координаты) x_1^* и x_3^* , тогда для любого параметра **t** коэффициенты $\boldsymbol{t}\, x_1^*$ и $(1-\boldsymbol{t})\, x_3^*$ тоже будут решением СЛАУ. При этом остальные коэффициенты разложения остаются неизменными. Это и доказывает Лемму 1.

<u>Замечание 4</u>

Посылка Леммы 1 является необходимым условием единственности решения.

Перепищем уранения (9), (10 в виде:

$$x_1 + a_1 x_2 = -(b_1 r + c_1 s) \qquad (11)$$

$$x_1 + a_2 x_2 = -(b_2 r + c_2 s) \qquad (12)$$

Очевидным образом имеет место также и

<u>**Лемма 2**</u>

Решение СЛАУ (11), (12) относительно переменных существует при условии $a_1 \neq a_2$, и оно является нетривиальным, если попарно не равны между собой параметры a_1 , b_1 , c_1 либо a_2, b_2, c_2 . Доказательство – очевидно.

Запишем решение СЛАУ (9), (10) в частном случае выбора параметров:

$$a_1 = 1,\ b_1 = 1,\ c_1 = 1,\ a_2 = 2,\ b_2 = 3,\ c_2 = 4,\ p = 1,\ h = -1,$$

а также зададим вектор $\boldsymbol{g}$, полагая u=2, v=3 (13)

В таком случае

$$\boldsymbol{x_1}(r, s) = r+2s \ ; \ \boldsymbol{x_2}(r, s) = -2r -3s \qquad (14)$$

Далее, подставляя (6) и (11) в СЛАУ , получим решение для параметров r, s , а, значит, и в целом для вектора $X=(x_1 , x_2 , x_3 ,x_4)$

r^* =17/5 ; s^* = -8/5

X^*= {1/5; -2; 17/5; -8/5}

Легко видеть, что все уравнения СЛАУ (3), (4), (5) обращаются в тождества.

Замечание 5

Приведем выражения для векторов псевдобазиса $\boldsymbol{e_1}$ и $\boldsymbol{f_1}$, которые в исходном базисе имеют выражение (см. (1) и (2)). Эти векторы в псевдобазисе $\mathbf{E}_{+2}$ будем выделять штрихом $\boldsymbol{e_1}$` и $\boldsymbol{f_1}$`

Итак

$\boldsymbol{e_1}$` ={2/5; -1; 4/5; -1/5}

$\boldsymbol{f_1}$` ={1/5; -1; 7/5; -3/5}

Заключение

Заметное отличие в представлении векторов в базисе **E** и в псевдобазисе $\mathbf{E}_{+2}$ состоит в том, что векторы исходного базиса **E** представляются в этом базисе как единичные, однако векторы псевдобазиса $\mathbf{E}_{+2}$ уже не есть единичные векторы в этом псевдобазисе !

При этом существование и единственность разложения выполнены в рамках посылок приведённых выше Леммы 1 и Леммы 2.

Библиографический список

1. Ефимов НВ., Розендорн Э.Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия.- М., ФИЗМАТЛИТ, 2005, 463 с.
2. Понарин Я.П. , Элементарная геометрия, т.3 - М., МЦНМО, 2009, 192 с.
3. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.Б. Математическое программирование. - М., Высшая школа, 1976, 352 с.

Оригинальность 84%