УДК 517.54, 372.851

DOI 10.51691/2541-8327_2022_9_2

ОСОБЕННОСТИ ПРЕПОДАВАНИЯ КУРСА ТФКП (ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО) ДЛЯ СТУДЕНТОВ МАШИНОСТРОИТЕЛЬНЫХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Скуднева О.В.,

старший преподаватель

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Н

УК ФН, кафедра «Вычислительная математика и математическая физика» (ФН-11)

Москва, Россия

Аннотация. В статье рассмотрены аспекты преподавания основ теории функций комплексного переменного студентам технических вузов на опыте кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Приведены структура построения домашних заданий и контрольных работ, примеры разработанных задач для студентов, рассмотрены интересные графические задачи, основанные на композиции отображений и возможности введения теории конформных отображений в электронную образовательную среду. Предложены темы, обеспечивающие связь фундаментального материала с курсами гидро и газодинамики и электротехники, изучаемыми на старших курсах.

Ключевые слова: Теория функций комплексной переменной, преподавание, задачи, конформные отображения, контрольно-измерительные материалы, электронная информационно-образовательная среда.

FEATURES OF TEACHING THE TFCP COURSE (THEORY OF FUNCTIONS OF A COMPLEX VARIABLE) FOR STUDENTS OF ENGINEERING SPECIALTIES

Skudneva O.V.,

Senior Lecturer

Bauman Moscow State Technical University,

NUC FN, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics (FN-11)

Moscow, Russia

Annotation. The article discusses aspects of teaching the basics of the theory of functions of a complex variable to students of technical universities on the experience of the Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics of Bauman Moscow State Technical University. The structure of the construction of homework and control papers, examples of developed tasks for students are given, interesting graphical tasks based on the composition of mappings and the possibility of introducing the theory of conformal mappings into the electronic educational environment are considered. The topics providing the connection of the fundamental material with the courses of hydro and gas dynamics and electrical engineering studied at the senior courses are proposed.

Keywords: Theory of functions of a complex variable, teaching, tasks, conformal mappings, control and measuring materials, electronic information and educational environment.

Курс ТФКП (Теории функций комплексной переменной) был обязательным для многих поколений советских и российских студентов технических вузов. Однако, в последнее время, ввиду его сложности, высокого уровня абстрактности, многие учебные заведения исключают ТФКП из программы преподавания либо существенно сокращают объём изучаемых тем. С учётом постоянно возрастающего санкционного давления на Российское государство, промышленность и науку, пришло время вернуть утраченные прежде позиции и существенно повысить уровень математической подготовки, прежде всего, технических специалистов, на которых страна возлагает большие надежды в области импортозамещения и обеспечения обороноспособности и безопасности.

Теория функций комплексной переменной относительно молодая отрасль математической науки. Потребность в комплексных числах назрела из-за проблем с извлечением корней из отрицательных чисел и нахождения корней многочленов. И вот, сначала для беспрепятственного извлечения корней, были придуманы (или все-таки открыты?) комплексные числа. В XVI веке некоторые итальянские математики того времени (Сципион дель Ферро, Николо Тарталья, Джироломо Кардано, Рафаэль Бомбелли) ввели в рассмотрение символ $\sqrt{-1}$ как формальное решение уравнения $x^2+1=0$. Впоследствии такие числа стали называть «мнимыми», а затем «комплексными» числами и записывать их в виде $a+bi$. Символ i для обозначения $\sqrt{-1}$ ввел Леонард Эйлер в XVIII в..

Математики вплоть до начала XIX века относились к комплексным числам с явным недоверием и предубеждением. Они считали эти числа «мнимыми» (Декарт), «несуществующими», «вымышленными», «возникшими от избыточного мудрствования» (Кардано)… Лейбниц же называл эти числа «изящным и чудесным убежищем божественного духа», а $\sqrt{-1}$ считал символом потустороннего мира (и даже завещал начертать его на своей могиле).

С введением комплексных чисел был получен ответ на вопрос о количестве корней многочлена n степени – теперь стало понятно, что их ровно n, если учитывать и комплексные корни, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.

Разработке комплексной теории посвящали своё время такие учёные как Гаусс, Вессель, Арган. Логически строгую теорию комплексных чисел построил в XIX в (1835 г) ирландский математик Вильям Роумен Гамильтон.

К настоящему времени изучение комплексных чисел развилось в важнейший раздел современной математики - теорию функций комплексного переменного (ТФКП).

С помощью комплексного анализа изучают плоские стационарные векторные поля. Открыто понятие комплексного потенциала, и с его помощью исследуют поля скоростей течения жидкостей и газов в гидро- и аэродинамике. Разработан комплексный метод расчёта электроцепей переменного тока в электротехнике. Теория управления использует ТФКП и операционное исчисление для анализа устойчивости автоматических систем. Находится применение комплексным числам в теории упругости и прочности, а также геодезии и картографии.

При разработке программы преподавания ТФКП в вузе, прежде всего, не стоит объединять её изучение с другими разделами высшей математики в общий курс. Комплексная теория достойна отдельного преподавания. При формальном подходе вероятность «пройти мимо» ТФКП весьма велика, и все труды фактически превращаются в пустую трату учебного времени. В серьёзном инженерном вузе изучению ТФКП обычно посвящают целый семестр (лучше всего, четвёртый), когда базовая подготовка уже позволяет студенту воспринимать материал. При этом первая часть семестра посвящается непосредственно ТФКП, а вторая – операционному исчислению. Количество лекций - не меньше двух часов в неделю, количество семинарских занятий – минимально, столько же. По возможности учебная часть должна обеспечить возможность проводить консультации с преподавателем с выделением времени и аудитории вне аудиторного расписания. Чтобы воспитать инженера, обладающего хорошим уровнем математической подготовки, нужно много преподавательского труда и много времени.

Важным подспорьем при освоении материала станет использование цифровых образовательных технологий, которые всё настойчивее внедряются в работу высшей школы. Прежде всего, при работе в электронной информационно-образовательной среде преподаватель и студент получают доступ к обширной базе контрольно-измерительных материалов, содержащей несравнимое с обычным учебником количество задач по выбранным темам и возможность формировать уникальные индивидуальные варианты домашних заданий и контрольных работ. В открытом доступе находятся утверждённые методическим советом вуза методические материалы - конспекты лекций, представленные в наглядной и доступной для понимания форме с графическим дизайном и семинарские занятия с общими алгоритмами решения задач и конкретные примеры, подробно разобранные, с иллюстрациями и вычислениями. Кроме того, электронное изложение предмета позволяет внедрить в тексты систему ссылок на требуемые разделы и материалы, что сохраняет время и повышает уровень освоения предмета.

Существующие материалы могут постоянно обновляться и дополняться, совершенствуя представленный курс. Электронная информационно-образовательная среда является интерактивной, поэтому на основе её материалов можно формировать он-лайн курсы, доступные не только студентам вуза, в котором она разработана.

Начинать изучение комплексного анализа, бесспорно, надо с азов – арифметических действий с комплексными числами и геометрии комплексной плоскости. Результаты сложения, вычитания, возведения в степень и извлечения корня обязательно иллюстрируются графическим представлением, что поможет не только понять механизм произведённого действия, но и взаимосвязь различных форм представления комплексного числа – алгебраической, тригонометрической и показательной, осознать смысл модуля и аргумента комплексного числа. Так как большинство студентов с техническим складом ума являются визуалами по способу восприятия новой информации, геометрия на комплексной плоскости поможет им сориентироваться в новом предмете. Прежде всего, введём понятие расстояния между точками на комплексной плоскости как модуля разности комплексных чисел $|z_2 - z_1|$ (см. рис.1). В этот момент важно акцентировать внимание студента на существенном преимуществе комплексной теории – дуальности природы комплексного числа, обладающего двумя координатами – действительной и мнимой частью, но обозначаемого в вычислениях одним символом z. Студент непременно оценит красоту и лаконичность уравнений и простоту построения окружности, эллипса и гиперболы в комплексном представлении (в отличие от общего уравнения линии второго порядка на декартовой плоскости $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$), как фактическую запись определения данных объектов в математических символах:

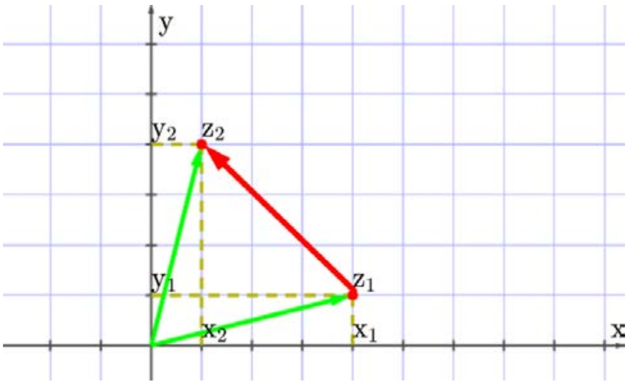

Рисунок 1 Расстояние между точками на комплексной плоскости (рис. автора)

Окружность – множество точек плоскости, равноудалённых от одной, называемой центром: $|z - z_0| = R$.

Эллипс – множество точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух точек-фокусов есть величина постоянная и равная двум большим полуосям: $|z-z_1|+|z-z_2|=2a$. Ветви гиперболы – множество точек плоскости, для которых разность расстояний до двух точек-фокусов есть величина постоянная и равная двум полуосям: $|z-z_1|-|z-z_2|=2a, \quad |z-z_2|-|z-z_1|=2a$.

Интересны комплексные представления и других объектов, например, прямой, как множества точек, равноудалённых от двух заданных точек: $|z-z_1|=|z-z_2|$, и полуплоскостей с двух сторон от прямой, заданных с помощью соответствующих неравенств: $|z-z_1| \underset{(\geq)}{\leq} |z-z_2|$, а также лемнискаты, определяемой как множество точек плоскости, где произведение расстояний от каждой до двух фокусов есть величина постоянная, равная квадрату половины расстояния между фокусами, или, в символах комплексной теории: $|z-z_1|\cdot|z-z_2|=c^2$.

Здесь же можно продемонстрировать возможности ТФКП для решения ранее казавшихся трудными задач, выносимых даже на олимпиады, например: составить уравнение эллипса с заданными фокусами, проходящего через заданную точку.

После успешного освоения вводных материалов наступает благоприятный момент для введения понятия функции комплексной переменой. Чтобы у студентов в головах сложилось системное восприятие материала, лучше всего, не торопясь, по очереди, рассмотреть основные функции и их свойства, области определения и отображения, ими осуществляемые. Это линейная функция, инверсия, дробно-линейная, степенная, экспонента, функция Жуковского, логарифмическая, тригонометрические, гиперболические функции и обратные к ним. Для всех функций выделяем действительную и мнимую части и, по возможности, представляем в виде композиции отображений. Например, дробно-линейную функцию рассматриваем как композицию пяти отображений (сдвиг, инверсию, растяжение, поворот и ещё сдвиг) и на подходящем объекте смотрим, что происходит при каждом отображении отдельно. Графические иллюстрации помогут в освоении материала!

Хорошим подспорьем также будет начать с вычисления значения функции в точке. Важно ввести понятия многолистной и однолистной функций, однозначной и многозначной функций, отметить встраиваемость комплексной теории в общую канву математического анализа без противоречия с прежде изученными свойствами функций. И опять подчеркиваем дуальность природы функции в комплексном анализе как функции одной переменой z и одновременно как линейной комбинации с мнимой единицей двух функций двух действительных переменных: $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Для многозначных функций отмечаем, что название пишется с заглавной буквы. Полезно ближе познакомиться с Ar-функциями, произвести вывод формулы и вычислить значение в заданной точке:

Пример: получить выражение для функции $\omega = Ar\sin z$ и вычислить значения в точке $z_0 = \frac{1}{2}$

Решение: $\sin w = z = \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i}$, откуда следует: $\left(e^{i\omega}\right)^2 - 2ize^{i\omega} - 1 = 0$

$$e^{i\omega} = iz \pm \sqrt{1 - z^2} \Rightarrow \omega = Ar\sin z = \frac{1}{i} Ln\left(iz \pm \sqrt{1 - z^2}\right)$$

$$\omega = Ar\sin\frac{1}{2} = \frac{1}{i} Ln\left(i\frac{1}{2} \pm \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}\right) = -iLn\left(\frac{i}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{4}}\right)$$

$$-iLn\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = -i\ln\left(1 \cdot e^{i\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right)}\right) = -i\left(i\frac{5\pi}{6} + i2\pi k\right) = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$$

$$-iLn\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)=-i\ln\left(1\cdot e^{i\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)}\right)=\frac{\pi}{6}+2\pi k\ .$$

Здесь важно обратить внимание студентов на то, что многозначность функции Арксинус получается благодаря двум значениям корня второй степени и бесконечному числу значений натурального логарифма.

Наличие в тексте задачи требования вывести самому студенту формулу для вычисления тоже не случайно: некоторые студенты отмечали, что раньше они удивлялись – откуда берётся логарифм, но в силу беспечности не трудились найти вывод формулы в литературе или произвести его самостоятельно.

Дифференцируемость функции комплексного переменного и конформные отображения. Понятие производной для функции комплексного переменного сначала введём формально, как предел отношения приращения функции к приращению аргумента, а потом, развивая мысль, выходим на условия Коши-Римана [3,28](при наличии времени – вывести условия в полярных координатах), понятие сопряженной и гармонической функции, восстановление функции по её действительной или мнимой части. Обозначив на лекциях геометрический смысл модуля и аргумента производной, начинаем разговор о конформных отображениях первого рода. Показать студентам конформные отображения обычно просят энергомашиностроительные факультеты [2].

Наиболее часто встречающаяся задача – подобрать функцию, осуществляющую взаимно-однозначное отображение одной заданной области на другую заданную область, обычно это единичный круг или верхняя полуплоскость. Сама по себе это известная интересная задача, но она имеет бесконечное множество решений, что приводит к трудностям при изучении курса ТФКП в электронной образовательной среде. Возникают проблемы проверки ответа компьютером, требующие сложных программных действий.

Поэтому на кафедре были разработаны задачи на отображение линий и областей дробно-линейными, тригонометрическими и гиперболическими функциями. В результате решения у студента формируется представление о механизме преобразования функцией различных объектов. Например, так подробно выглядит отображение экспонентой линий внутри полосы шириной π.

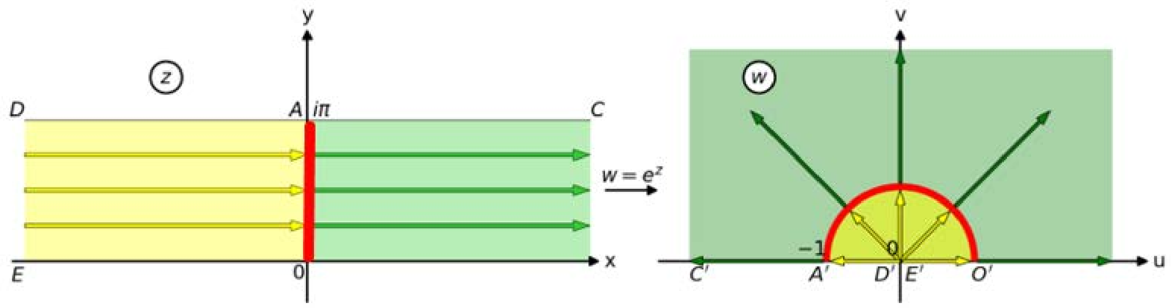

Рисунок 2 Отображение полосы экспоненциальной функцией (рис. автора)

Отображение функцией синус выглядит так (см. рис. 3):

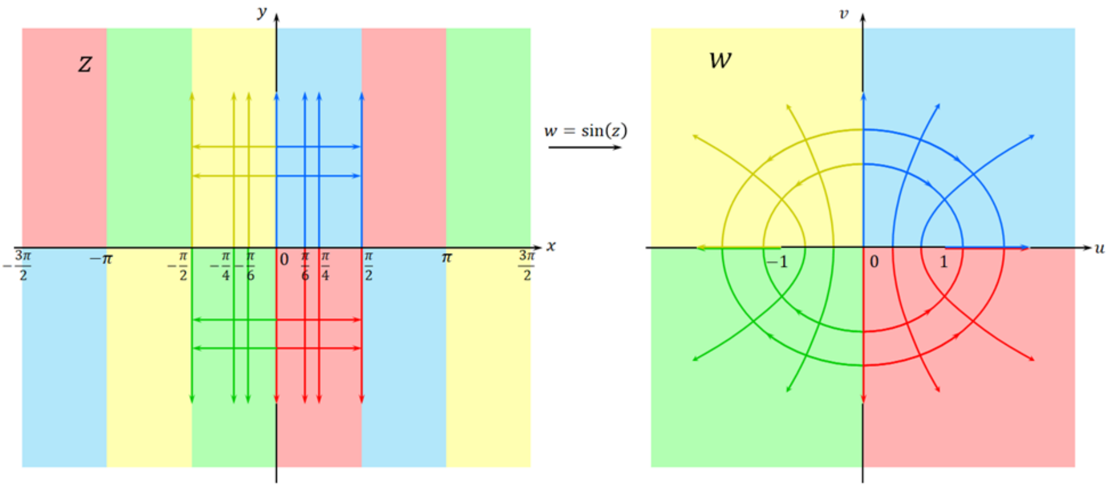

Рисунок 3 Отображение функцией синус (рис. автора)

Студенту предлагается получить уравнения (неравенства) полученных в результате отображения заданной функцией заданных линии или области. Например, горизонтальный отрезок переходит с помощью функции синус в полуэллипс, вертикальная прямая – в ветвь гиперболы.

Функция котангенс отображает вертикальную полосу $\left\{-\frac{\pi}{4} \le \operatorname{Re} z \le \frac{\pi}{4}\right\}$ во внешность единичного круга. При этом вертикальные прямые и горизонтальные отрезки внутри данной полосы переходят в дуги окружностей (см. рис.4)

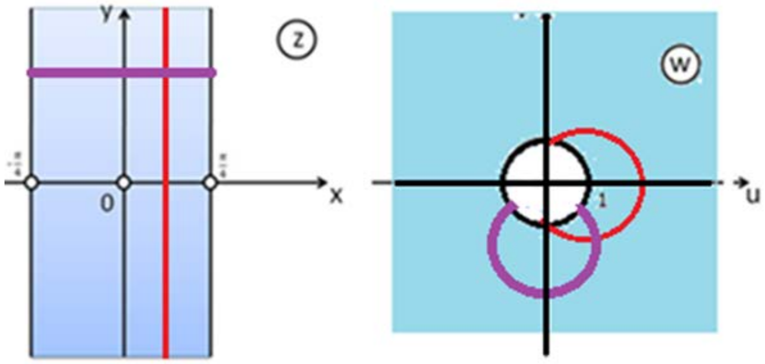

Рисунок 4 Отображение функцией котангенс (рис.автора)

Функцию котангенс рекомендуется рассматривать как композицию нескольких отображений: линейного, экспоненты, дробно-линейного: $\omega_1 = 2iz$, $\omega_2 = e^{\omega_1}$, $\omega = i\frac{\omega_2 + 1}{\omega_2 - 1}$.

Аналогично работают с функцией тангенс и гиперболическими тангенсом и котангенсом.

Интеграл и теория вычетов.

Задачи на интеграл от неаналитических функций интересны прежде всего выбором способа параметризации пути интегрирования и особой сложности в вычислении не представляют.

При изучении теории вычетов главное – не скатиться к формальному применению шаблона, а добиться от студента понимания сути происходящего. Поэтому очень важно подробно разобрать вывод формулы Коши, следствия из неё, разложение функции в степенной ряд и не упустить момент вывода формулы для вычета функции. Интересны задачи на вычет в бесконечно удалённой точке, на определение характера особых точек функции, при этом, опять же надо добиваться от студента работы мысли с помощью задач с «подвохом». Например, таких: $\oint\limits_{|z+2i|=1} \frac{sh\left(\frac{\pi}{2}z\right)dz}{\left(z^2+4\right)^2}$ - в этой задаче точка z=-2i является полюсом первого порядка, так как обнуляет числитель подынтегральной функции, а в интеграле $\oint\limits_{|z-\ln 3-i2\pi|=1} \frac{zdz}{3shz-4}$ необходимо сначала вычислить гиперболический арксинус 4/3, нанести точки на комплексную плоскость и выделить те, что попадают внутрь контура, определить их характер с помощью понятия нуля функции , и вычислить вычеты по формуле для полюса первого порядка с помощью производной.

В заключении изучения теории вычетов полезно рассмотреть прикладные задачи на применение вычетов, например, к вычислению определённых интегралов, и там, где это возможно, произвести вычисление двумя способами.

По завершению изучения основных тем ТФКП по программе вуза очень важно помочь студенту «перекинуть мостик» от фундаментальных предметов к его инженерной специальности [1,29]. Для этого необходимо посетить кафедры и поинтересоваться, что конкретно применяется при изучении специальных дисциплин. Например, на факультете Энергомашиностроения изучают гидродинамику и газодинамику, где для исследования плоскопараллельных векторных полей используют понятие и свойства комплексного потенциала. На кафедре Электротехники с помощью ТФКП производят расчёт электрических цепей. Поэтому в курсе ТФКП автором разработаны факультативные материалы по данным темам, где в привычных студенту обозначениях и терминах освещены данные вопросы.

В заключении приведен пример типового задания по курсу ТФКП для студентов факультета Энергомашиностроения.

1. Задача на арифметические действия с комплексными числами, возведение в степень и извлечение корня (3 пункта);
2. Изобразить область на комплексной плоскости;
3. Вычислить значение функции в точке;
4. Проверить функцию на аналитичность и вычислить её производную;
5. Восстановить функцию по её действительной или мнимой части, если это возможно;
6. Найти образ области или линии при отображении заданной дробно-линейной функцией;
7. Найти образ области или линии при отображении заданной тригонометрической или гиперболической функцией;
8. Получить выражениедля вычисления обратной к тригонометрической или гиперболической функции и вычислить значение в заданной точке;
9. Определить область сходимости степенного ряда и произвести анализ сходимости в граничных точках области сходимости;
10. Разложить функцию в степенной ряд в окрестности заданной точки с указанием областей разложения;
11. Вычислить интеграл от функции по заданному пути;
12. Найти изолированные особые точки функции, указать их характер и вычеты в них, включая бесконечно-удалённую точку;
13. Вычислить с помощью теории вычетов интеграл от аналитической функции по замкнутому контуру.

Для контроля теоретических знаний студента на кафедре применяется выдача студенту микроконтрольных - билет с тремя или четырьмя вопросами, подразумевающих ответ «да» или «нет», что легко и быстро проверяется (см.рис.5). Билет выдаётся в конце лекции, что является дополнительной формой контроля посещаемости.

Выберите все верные утверждения.

- [x] $\sqrt[3]{1} = e^{i\frac{2\pi k}{3}}, k = 0, 1, 2.$
- [x] Угол φ между вектором, обозначающим комплексное число, и положительным направлением действительной оси называется аргументом комплексного числа $z : \varphi = arg\,(z)$ - главное значение аргумента, если $\varphi \in (-\pi; \pi]$, и $Arg\,(z) = arg\,(z) + 2\pi k$ при $k \in \mathbb{Z}$.
- [ ] Умножение комплексных чисел при алгебраической форме записи чисел z_1 и z_2 действие сводится к умножению двучлена на двучлен с учетом того, что $i^2 = -1 : z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 + y_1 y_2) + i\,(x_1 y_2 + x_2 y_1)$.
- [x] Уравнение эллипса на комплексной плоскости имеет вид: $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$, т.к. по определению, эллипс – это множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух фиксированных точек – фокусов z_1, z_2 есть величина постоянная и равная длине большей полуоси $(2a)$. Фокусное расстояние: $c = \frac{|z_1 - z_2|}{2}$, центр эллипса – точка $z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}$. Малая полуось эллипса вычисляется по формуле $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

Рисунок 5 Пример билета для микроконтрольной (https://nomotex.ru/)

Введение новых типов задач и системы микроконтрольных, увеличение вариантов и постоянное обновление контрольно-измерительных материалов благодаря введению электронных образовательных технологий позволило повысить заинтересованность и вовлечённость студентов в изучение курса ТФКП и других разделов высшей математики. Главное, чего удалось добиться – повышение уровня реальных знаний студентов, которые, очень надеюсь, они уже очень скоро смогут применить в реальных секторах отечественного машиностроения.

Библиографический список.

1. Алгазин О.Д., Богомолов В.Г., Копаев А.В. Методы теории функций комплексного переменного в прикладных задачах. Учебное пособие. - М. Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1993. – 68с.
2. Добрица Б.Т., Дубограй И.В., Скуднева О.В. Простейшие конформные отображения. - Методические указания к решению задач. - М.:Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2013. – 41, с.
3. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного перменного. Операционное исчисление. Теория Устойчивости. М. Наука, 1981 – 303 с.
4. Соломенцев Е.Д. Функции комплексного переменного и их применения. - М. Высшая школа, 1988. – 167с.

Оригинальность 94%